AJUDA PARA A ESCOLHA DO PARÂMETRO DE RELAXAÇÃO ω

Na resolução de um sistema linear Ax=b pelo Método S.O.R, Wandresen (1980) cita que, para facilitar a escolha de valores para ω (parâmetro de relaxação), deve-se levar em consideração dois teoremas: o teorema de Kahan, que afirma que, se os valores da diagonal da matriz A forem todos não-nulos ($a_{ii} \neq 0$ para todo valor de i), o método converge apenas para $0 < \omega < 2$, e o teorema desenvolvido por Ostrowski (1954), citado por Wandresen (1980), que define que, para um sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes A é positiva definida, há certeza de convergência do método para o intervalo $0 < \omega < 2$, qualquer que seja a aproximação inicial de x. Além disso, Wandresen (1980) mostra que, para $\omega = 1$, o método se torna idêntico ao Método de Gauss-Seidel.

Assim, a princípio, como parâmetro de relaxação, pode-se escolher qualquer valor diferente de 0 (porque zero leva o programa a um looping, segundo sua equação diretriz). Além disso, valores entre 0 e 2, conforme acima, devem levar à melhor eficiência.

Schmidt (2012) declara que, se a matriz dos coeficientes A for simétrica positiva definida e tridiagonal, a opção ótima para ω é dada pela equação (1).

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-[p(\ T_j\ )]^2}} \tag{1}$$

Franco (2006) afirma que uma matriz real simétrica A, $n\,x\,n$, é positiva definida se todos os seus menores principais líderes (determinantes das submatrizes de A, constituídas retirando as k últimas linhas e k últimas colunas, para $k = n-1, n-2, \cdots, 1, 0$.), são positivos. Para maior compreensão, segue-se a verificação sobre se a matriz da equação (2) é positiva definida ou não.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 12 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Os menores principais líderes de F, para k=2, k=1 e k=0, respectivamente.

$$1,\ det\left(\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}\right), \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 12 \end{bmatrix}\right) \tag{3}$$

Como $det\left(\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}\right) < 0$, a matriz F não é positiva definida.

Para encontrar $p(\ T_j\ )$, deve-se encontrar o $det(T_j - \lambda I) = 0$, sendo a matriz λI definida pela equação (4), para um exemplo de ordem 3.

$$\lambda \mathrm{I} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4)$$

O mesmo autor define T_j.

$$T_j = D^{-1}(L + U) \quad (5)$$

Para compreender as matrizes D, L e U, devemos revisar os conceitos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Para o sistema linear $Ax = b$, Wandresen (1980) define as matrizes D, L e U, pelas equações (6), (7) e (8), respectivamente.

$$D = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, se\ i \neq j; \\ a_{ij}, se\ i = j; \end{cases} \quad (6)$$

$$L = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, se\ i < j; \\ a_{ij}, se\ i > j; \end{cases} \quad (7)$$

$$U = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, se\ i > j; \\ a_{ij}, se\ i < j; \end{cases} \quad (8)$$

Segue um exemplo numérico, encontrado na bibliografia de Schmidt (2012), com matriz A simétrica positiva tridiagonal. Seja um sistema linear descrito pela equação (9).

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 51 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Para determinar o parâmetro ω deve-se, primeiramente, calcular T_j. Para o exemplo acima, define-se as matrizes D, L e U.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Sendo assim.

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (11)$$

Efetua-se $L + U$ e multiplica-se o resultado por D^{-1}.

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Para encontrar $p(\ T_j\ )$, o primeiro passo é calcular $T_j - \lambda \mathrm{I}$, conforme equação (13).

$$T_j - \lambda \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & -\lambda & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & -\lambda \end{pmatrix} \tag{13}$$

Sendo assim, calcula-se o determinante e iguala-se a zero.

$$-\lambda^3 + \frac{17\lambda^2}{81} = 0 \tag{14}$$

Segundo Schmidt (2021), efetua-se as operações por evidência.

$$\lambda = \frac{\sqrt{17}}{9} \tag{15}$$

Por fim, aplica $p(\ T_j\ ) = \frac{\sqrt{17}}{9}$ na equação (1) para encontrar o parâmetro de relaxação ω.

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\frac{\sqrt{17}}{9}]^2}} = 1{,}058823529$$

Referências

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. Universidade de São Paulo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação: [s. n.], 2006. 494 p.

SCHMIDT, Mateus. **O Método SOR** [S. l.: s. n.], [2012]. Aplicações do método de Sobre-Relaxação Sucessiva em sistemas de equações lineares. Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/685/2019/08/sor_4.pdf. Acesso em: 12 maio. 202

WANDRESEN, Romualdo. **MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃODE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NORMAIS**. 1980. 227 p. Dissertação (Mestre em Ciências) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ, [S. l.], 1980. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/32997/D%20-%20ROMUALDO%20WANDRESEN.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 7 maio 2021.