

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
CÂMPUS VOTUPORANGA

FELIPE SANTANA PENA

**INFORMATIZAÇÕES *ON-LINE* PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS
DE EQUAÇÕES LINEARES PELOS MÉTODOS: FATORAÇÃO QR,
S.O.R E GRADIENTES CONJUGADOS.**

VOTUPORANGA

2021

Felipe Santana Pena

**INFORMATIZAÇÕES *ON-LINE* PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS
DE EQUAÇÕES LINEARES PELOS MÉTODOS: FATORAÇÃO QR,
S.O.R E GRADIENTES CONJUGADOS.**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como exigência para
obtenção do diploma do Curso de
bacharelado em Engenharia Civil do
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia, Campus Votuporanga.

Professor Orientador: M.e Gustavo Cabrelli
Nirschl

Aprovado pela banca examinadora em ____ de _____ de 2021.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. M.e Gustavo Cabrelli Nirschl

Prof. D.ra. Bruna Gonçalves Cavallari

Prof. D.r Osvandre Alves Martins

Dedico esse trabalho aos meus pais, que sempre me apoiaram nas horas difíceis e se esforçaram para que esse sonho se realizasse.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Leonildo e Roseney, por sempre me incentivarem e mostrarem a importância da educação e dos estudos para a minha formação. Sempre se esforçaram para me dar condições de apenas estudar, com apoio incondicional em todas as dificuldades e sempre mostrando que sou capaz de realizar meus sonhos.

Agradeço a minha irmã, Maria Vitória, por ter sido minha companheira durante toda a minha vida, me ajudando e apoiando nos momentos de dificuldades.

Agradeço a minha namorada, Lara, por toda força, incentivo, compreensão e carinho que recebi especialmente nos dias em que pensei em desistir.

Agradeço aos meus amigos de graduação, por compartilharem momentos comigo e auxiliarem em todo o processo.

Agradeço a todos os professores e servidores do IFSP Campus Votuporanga, por contribuírem diretamente e indiretamente para a conclusão dessa etapa, particularmente a professora Bruna, por ter me despertado o interesse pela matemática.

Por fim, e não menos importante, agradeço ao meu orientador e amigo, M.e Gustavo Cabrelli Nirschl, por me ensinar muito mais do que os conceitos desse trabalho. Obrigado por toda a paciência, apoio, conselhos e por todo o tempo me orientando.

"O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano".

Sir Isaac Newton

RESUMO

Em várias áreas do cálculo aplicado à resolução de problemas, incluindo a Engenharia Civil, as aplicações computacionais se utilizam da resolução de sistemas de equações lineares de ordem bastante elevada. Em paralelo, alguns programas computacionais, atualmente, resolvem sistemas de equações lineares com a facilidade e precisão desejadas, porém não possibilitam a verificação de todos os cálculos por parte do usuário. Com o intuito de facilitar e promover o conhecimento de métodos que resolvem sistemas lineares, especialmente os encontrados em aplicações de Engenharia Civil, apresenta-se, neste trabalho, o desenvolvimento de programas que não só resolvem, como, principalmente, fornecem relatórios detalhados envolvendo todas as rotinas de cálculo. Foram selecionados os métodos FATORAÇÃO QR, S.O.R e GRADIENTES CONJUGADOS, para que alunos, profissionais e até professores utilizem como estudo e elemento auxiliar na metodologia de ensino. Destaca-se que as implementações foram realizadas utilizando a linguagem HTML/JavaScript e foram incorporadas a um portal na *Web* de acesso livre aos interessados.

Palavras-chave: Sistemas de equações lineares; Método S.O.R; Fatoração QR; Método dos Gradientes Conjugados; Informatização de Cálculos; Relatório detalhado.

ABSTRACT

In several fields of calculus applied to problem solving, including Civil Engineering, computational applications are based on solving systems of linear equations of quite high order. In addition, nowadays some computer programs solve systems of linear equations with the desired ease and precision, although they do not allow the user to check all the calculations. In order to facilitate and promote the knowledge of methods that solve linear systems, especially those found in Civil Engineering applications, this paper presents the development of softwares that not only solve the problems but also provide detailed reports with all the calculation routines. The QR FACTORIZATION, S.O.R., and CONJUGATED GRADIENTS methods were selected. Thus, students, professionals, and even professors may use it like a study and auxiliary element in the teaching methodology. It is highlighted that the implementations were carried out using the HTML/JavaScript language methods and have been incorporated into a Web portal that is freely accessible to interested parties.

Keywords: Systems of Linear Equations; S.O.R. Method; QR Factorization; Conjugate Gradient Method; Computerization of Calculations, Detailed Report.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Trelça.	25
Figura 2- Equações por equilíbrio estático nos nós da trelça da Figura 1.	26
Figura 3- Forma matricial do exemplo.	26
Figura 4- Trelça Fink	27
Figura 5- Equações referentes aos nós da Trelça Fink.	28
Figura 6- Sistema linear da Trelça Fink da Figura 4.	28
Figura 7 – Projeto de estrutura metálica.	29
Figura 8- Equações para cada nó da estrutura da Figura 7.	30
Figura 9- Forma matricial do sistema linear da Figura 8.	30
Figura 10 - Circuito Elétrico	31
Figura 11 - Equação química.	31
Figura 12 - Solução do exemplo pelo Método S.O.R	39
Figura 13 - Exemplo de código para página Web.	47
Figura 14 - Exemplo de Página Web.....	47
Figura 15 – Palavras reservadas para a programação em linguagem JavaScript. ...	48
Figura 16- Algumas propriedades Math.	49
Figura 17- Esquema da modularização de algoritmos.	50
Figura 18 - Função Exemplo	50
Figura 19 - Exemplo de sub-rotina.	51
Figura 20- Tela inicial do Maxima.....	52
Figura 21 - Instruções para o acesso da área de sistemas lineares.	53
Figura 22- Caixa referente ao número de equações.	53
Figura 23- Exemplo de sistema.....	54
Figura 24- Solução do sistema.....	54
Figura 25- Parte da tela inicial do Matrix Calculator	55
Figura 26- Células para inserir as equações	55
Figura 27- Exemplo de sistema.....	56
Figura 28- Resolução passo a passo do exemplo.....	57
Figura 29- Tela inicial do Symbolab	58
Figura 30- Campo para inserir as equações.	59
Figura 31- Exemplo de sistema.....	59
Figura 32- Resolução do exemplo.....	60
Figura 33- Metodologia deste trabalho.....	62
Figura 34 - Fluxograma Fatoração QR.....	63
Figura 35 - Algoritmo principal do Método QR.	64
Figura 36- Fluxograma Método S.O.R	65
Figura 37 - Algoritmo principal do Método S.O.R	66
Figura 38- Fluxograma Método dos Gradientes Conjugados	67
Figura 39 - Algoritmo principal do Método dos Gradientes Conjugados.	68
Figura 40 - Algoritmo para aumentar a largura da página.	69
Figura 41 - Recorte da tela do NEV.	70
Figura 42 - Interface do programa Fatoração QR.	71
Figura 43- Exemplo de matrix escrita em TXT.	71
Figura 44 - Exemplo numérico para a FATORAÇÃO QR.....	72
Figura 45 - Solução do exemplo numérico para a FATORAÇÃO QR.	72

Figura 46 - Interface do programa MÉTODO S.O.R.	74
Figura 47 - Exemplo numérico para o MÉTODO S.O.R.	75
Figura 48 - Solução do exemplo numérico da Figura 44	76
Figura 49 - Interface do programa MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS.	77
Figura 50 - Exemplo numérico para o MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS.	78
Figura 51 - Solução do exemplo numérico.	78
Figura 52- Relatório referente ao exemplo numérico pela FATORAÇÃO QR.	86
Figura 53 - PDF "Ajuda"	90
Figura 54 - Relatório PDF referente ao exemplo numérico pelo MÉTODO S.O.R.	93
Figura 55- Relatório PDF referente ao exemplo numérico pelo MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Comparação do número de iterações alcançadas pelos MÉTODOS S.O.R, Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi, na resolução do sistema (60) por Schmidt (2012)....	40
Tabela 2- Tabela do exemplo pela Fatoração QR e Eliminação de Gauss	73
Tabela 3- Tabela do exemplo pelo Método S.O.R, JACOBI e Eliminação de GAUSS.	76
Tabela 4- Tabela do exemplo pelo Método S.O.R com $\omega=1$ e GAUSS-SEIDEL	77
Tabela 5 - Tabela do exemplo pelo Método dos Gradientes Conjugados, Jacobi e Eliminação de Gauss	79
Tabela 6 - Tabela comparativa do exemplo.	80
Tabela 7 - Tabela comparativa do exemplo	81

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
HTML	<i>HyperText Markup Language</i> (Linguagem de Marcação de Hipertexto)
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
NEV	Núcleo de Engenharia Virtual
NEVE	Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental
PDF	<i>Portable Document Format</i> (Formato Portátil de Documento)
SGML	<i>Standard Generalized Markup Language</i> (Linguagem de Marcação Generalizada Padrão)
S.O.R	<i>Successive over-relaxation</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz A do sistema $Ax = b$
b	Vetor b do sistema $Ax = b$
x_i	Elementos do vetor solução do sistema linear $Ax = b$
a_{ij}	Elementos que compõem a matriz A , do sistema $Ax = b$
b_{ij}	Elementos que compõem o vetor b , do sistema $Ax = b$
Q	Matriz Q da fatoração QR
q_{ij}	Elementos que compõem a matriz Q , da fatoração QR
$ \vec{z}_j $	Norma vetorial do vetor z
R	Matriz R da fatoração QR
ω	Parâmetro de Relaxação do Método S.O.R
k	Número da iteração
D	Matriz D do Método S.O.R
L	Matriz L do Método S.O.R
U	Matriz U do Método S.O.R
$f'(x_0)$	Derivada de $f(x)$ no ponto x_0
$f''(x_0)$	Derivada a segunda de $f(x)$ no ponto x_0
$\nabla f(x)$	Gradiente de $f(x)$
$\frac{\partial f}{\partial x_n}$	Derivada parcial de f em relação a x
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$	Derivada a segunda de f em relação a x
$r^{(k)}$	Resíduo da iteração k
α	Parâmetro usado para regular os passos da iteração 1 do Método dos Gradientes Conjugados
$d^{(k)}$	Direção adotada na iteração k
β	Parâmetro usado para regular os passos da distância $d^{(k)}$ para $k > 1$
$x_{(k)}$	Vetor solução na iteração k
γ	Parâmetro usado para regular os passos do vetor solução $x_{(k)}$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	OBJETIVOS	20
1.2	JUSTIFICATIVA.....	20
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1	SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	21
2.1.1	Definições	21
2.1.2	Sistemas Homogêneos	22
2.1.3	Sistemas Equivalentes.....	22
2.2	MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES.....	24
2.3	SISTEMAS LINEARES NA ENGENHARIA	24
2.3.1	Treliça Simples	25
2.3.2	Treliça Fink	27
2.3.3	Estruturas metálicas	29
2.3.4	Circuitos elétricos	30
2.3.5	Equilíbrio de equações químicas.....	31
2.4	RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR FATORAÇÃO QR	32
2.5	RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES PELO MÉTODO S.O.R	35
2.6	RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES PELO MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS	40
2.7	PROGRAMAÇÃO DE PÁGINAS WEB.....	45
2.7.1	HTML	46
2.7.2	Javascript.....	48
2.7.3	Otimização de algoritmos	49
2.8	SOFTWARES PARA CÁLCULO DE SISTEMAS LINEARES.....	51
2.8.1	Software Maxima	52
2.8.2	Matrix calculator	54
2.8.3	Symbolab	58

3	METODOLOGIA	61
4	RESULTADOS	62
4.1	ALGORITMOS PRINCIPAIS E SEUS FLUXOGRAMAS	63
4.2	PLATAFORMA NEV	69
4.2.1	Interface de usuários dos programas	70
4.2.1.1	FATORAÇÃO QR	70
4.2.1.2	MÉTODO S.O.R.	73
4.2.1.3	MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS	77
4.3	TESTES	79
4.3.1	Exemplo 1: Sistema 2x2	79
4.3.2	Exemplo 2: Sistema 3x3	80
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
	REFERÊNCIAS	83
	APÊNDICE A – EXEMPLO DO PROGRAMA FATORAÇÃO QR	86
	APÊNDICE B – PDF DE AJUDA SOBRE O PARÂMETRO DE RELAXAÇÃO	90
	APÊNDICE C – EXEMPLO DO PROGRAMA MÉTODO S.O.R.	93
	APÊNDICE D – EXEMPLO DO PROGRAMA MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS	98
	APÊNDICE E – IMPLANTAÇÃO DOS ALGORITMOS PRINCIPAIS EM JAVASCRIPT	103

1 INTRODUÇÃO

Araújo (2017) afirma que “os algoritmos numéricos são tão antigos quanto a civilização humana. Os babilônios, vinte séculos antes de Cristo, já possuíam tabelas de quadrados de todos os inteiros entre 1 e 60”. O autor acrescenta que Newton e muitos outros matemáticos, dos séculos XVIII e XIX, trabalharam no desenvolvimento de métodos numéricos para a resolução de problemas.

Neste contexto, com o avanço tecnológico tornou-se cada vez mais notável a substituição de métodos rudimentares por programas de computador para realizar tarefas de acordo com nossas necessidades. Porém, a grande maioria dos programas de computador, especialmente as aplicações na Engenharia Civil, apenas disponibilizam partes do cálculo ou, até mesmo, somente o resultado final. Dessa forma, não explicam como os valores foram obtidos e isso impede que o usuário entenda toda a metodologia de cálculo envolvido.

Com o intuito de auxiliar alunos, professores e profissionais, o Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental (NEVE), grupo de pesquisa cadastrado no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), busca desenvolver programas didáticos para a área da Engenharia Civil. Os programas desenvolvidos pelo grupo apresentam não só os resultados finais, como também emitem relatórios que detalham os cálculos realizados, bem como apresentam a teoria básica associada.

Além disso, é importante ressaltar que já foram criados, pelo referido grupo de pesquisa, diversos programas para resolver sistemas de equações, como por exemplo o de Gauss. Porém, na Engenharia Civil existem problemas de ordem grande com coeficientes do tipo esparsos (com grande proporção de zeros) e, de acordo com Ruggiero (1996, p. 177), os métodos diretos provocam alterações na matriz “A” e surgem elementos não nulos em posições que eram nulas. Dessa forma, os métodos iterativos tornam-se uma alternativa pois não alteram a matriz “A”.

Assim, soluções informatizadas para sistemas lineares $Ax=b$ podem se mostrar eficientes e eficazes se baseadas em métodos como S.O.R (*Successive over-relaxation*), a FATORAÇÃO QR e o GRADIENTES CONJUGADOS.

1.1 OBJETIVOS

Cita-se o objetivo geral de conceber e implementar soluções informatizadas para sistemas lineares, baseadas nos métodos S.O.R, FATORAÇÃO QR a GRADIENTES CONJUGADOS, dotadas de funcionalidades de detalhamento e fundamentação teórica, com referências bibliográficas, dos passos requeridos.

Como objetivos específicos, citam-se:

- Detalhar a aplicação da resolução de sistemas de equações lineares e suas características na resolução de problemas de Engenharia Civil;
- Algoritmizar a resolução de sistemas lineares, com foco inicial apenas no resultado final, até que sejam validados em comparação com resultados de outros programas e cálculos manuais;
- Projetar relatórios e implementar rotinas computacionais para sua emissão em PDF (*Portable Document Format*) considerando, além de todo o memorial de cálculo, a teoria e todo o raciocínio utilizado nos métodos;
- Disponibilizar os módulos de programa on-line para auxiliar alunos, professores e profissionais no estudo dos métodos utilizados.

1.2 JUSTIFICATIVA

Além de contextualizar a aplicação da resolução de sistemas de equações lineares e suas características na Engenharia Civil, as soluções propostas e desenvolvidas se mostram capazes de auxiliar alunos, professores e profissionais no processo de ensino-aprendizagem referente à resolução de sistemas lineares por meio da apresentação de conceitos, fundamentações e passos em relatório estruturado de forma instrutiva.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, aborda-se a fundamentação teórica necessária para a compreensão da resolução de sistemas lineares pela Fatoração QR, Método S.O.R e Método dos Gradientes Conjugados, bem como algumas de suas aplicações na engenharia. Além disso, aborda-se, de forma sucinta, a programação de páginas *Web* e outros *softwares* para cálculo de sistemas lineares.

2.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Esta seção descreve os tipos, definições e as operações elementares acerca de sistemas lineares.

2.1.1 Definições

Vaz (2011) afirma que o primeiro passo para o surgimento da Álgebra e dos sistemas lineares foi a necessidade dos antigos adotarem palavras para identificar números desconhecidos em problemas matemáticos. No século XVI, Robert Record, Thomas Harriot e René Descartes introduzem o sinal de igual e as letras finais do alfabeto “x”, “y” e “z” para simbolizarem os elementos desconhecidos.

A mesma autora acrescenta que a Álgebra é uma forma de alfabetização matemática com símbolos universais, visto que qualquer matemático consegue interpretá-la, independente do seu idioma. Além disso, Vaz (2011, p. 11) destaca que “um problema clássico dessa alfabetização matemática é o problema dos sistemas de equações lineares virem da busca de soluções para problemas, tendo ele soluções ou não”.

Sistemas lineares constituem-se por equações do primeiro grau que, segundo Ruggiero (1996), são formadas exclusivamente de adições e subtrações de termos que são constantes ou o produto de uma constante por uma variável de potência igual a um. A título de exemplo, as equações (1) e (2) formam um sistema linear, sendo a_{11} , a_{12} , a_{21} e a_{22} denotados como coeficientes e b_1 e b_2 como termos independentes.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (2)$$

Neste contexto, Ruggiero e Lopes (1996) descrevem um sistema linear com m equações e n variáveis conforme as equações (3), (4) e (5).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3)$$

$$\quad \quad \quad (4)$$

$$\quad \quad \quad (5)$$

Onde:

a_{ij} : coeficientes $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

x_j : variáveis $j = 1, \dots, n$;

b_i : constantes $i = 1, \dots, m$;

Os métodos de resolução podem utilizar os sistemas lineares $Ax = b$ na sua representação matricial, representada na equação (6).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

Além disso, de acordo com Ruggiero e Lopes (1996), resolver um sistema linear tem como base encontrar os valores de x_j , para $j=1$ até n , que satisfaçam todas as equações.

2.1.2 Sistemas Homogêneos

Iezzi e Hazzan (2006) afirmam que, para que um sistema linear seja homogêneo, todos os termos independentes das equações lineares devem ser iguais a zero. Segue um exemplo de sistema linear homogêneo, formado pelas equações (7) e (8).

$$\begin{cases} 5x + 2y = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 8x + 4y = 0 \end{cases} \quad (8)$$

2.1.3 Sistemas Equivalentes

Iezzi e Hazzan (2006) definem que, para que dois sistemas lineares sejam equivalentes, deve-se apresentar as mesmas soluções. Os autores acrescentam que dois sistemas equivalentes não precisam, necessariamente, apresentar o mesmo número de equações, apenas o mesmo número de variáveis.

Segue um exemplo numérico de sistemas equivalentes, descritos pelos sistemas (S₁) e (S₂).

$$S_1 \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} (9) \\ (10) \end{matrix}$$

Multiplica-se a equação (9) por 3.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} (11) \\ (12) \end{matrix}$$

Subtrai-se as equações (11) e (12).

$$x + 0y = 1, \text{ logo } x = 1 \quad (13)$$

Substitui-se o valor de x na equação (9).

$$1 + y = 3 \quad (14)$$

$$y = 2 \quad (15)$$

Sendo assim, a solução de S_1 é (1,2).

$$S_2 \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} (16) \\ (17) \end{matrix}$$

Subtrai-se as equações (16) e (17).

$$0x - y = -2 \quad (18)$$

$$y = 2 \quad (19)$$

Substituindo na equação (16):

$$x + 2 = 3 \quad (20)$$

$$x = 1 \quad (21)$$

Logo, a solução de S_2 é (1,2). Sendo assim, os sistemas 1 e 2 são equivalentes.

Além disso, Ferreira (2011, p. 51) afirma que existem três operações que resultam em sistemas equivalentes, chamadas de operações elementares.

A mesma autora acrescenta que a primeira é a troca de duas linhas da matriz, a segunda é a multiplicação de todos os elementos de uma linha por um escalar diferente de zero e a última, e não menos importante, a substituição de uma linha pela soma dela com um múltiplo de outra linha. Para uma matriz A representada pela equação (22), as equações (23), (24) e (25) representam as operações elementares.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Trocar a primeira linha pela segunda.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Multiplicar a primeira linha por dois.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 16 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Substituir a segunda linha pela soma dela com duas vezes a primeira linha.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 19 \end{pmatrix} \quad (25)$$

2.2 MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Conforme Ruggiero e Lopes (1996), um sistema linear da forma $Ax = b$ pode ser resolvido por métodos diretos ou métodos iterativos. Um método é direto quando a solução exata é obtida realizando-se um número finito de operações. Por outro lado, nos métodos iterativos, a solução é obtida por uma sequência de aproximações sucessivas, até que o erro encontrado seja menor que a tolerância pré-estabelecida ou atinja o número máximo de iterações.

Dessa forma, os autores citam diversos métodos para a resolução de sistemas lineares, por exemplo pela Eliminação de Gauss, que é um método direto que se utiliza das operações elementares. Em resumo, este método consiste em elaborar um sistema ' $Ax = b$ ' que seja equivalente a $Ax = b$. A premissa é obter, por meio da estratégia de escalonamento, um sistema triangular superior, ou seja, em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero e, após isso, resolvê-lo.

De acordo com Barroso *et. al.* (1987), não é possível afirmar se os métodos diretos são melhores que os iterativos e vice-versa. Os autores afirmam que devemos estabelecer critérios: os métodos diretos são mais vantajosos para sistemas de pequeno porte e os métodos iterativos para sistemas de grande porte e esparsos. No trabalho aqui apresentado, o método de resolução de sistemas lineares pela FATORAÇÃO QR é direto e os métodos S.O.R e GRADIENTES CONJUGADOS são iterativos.

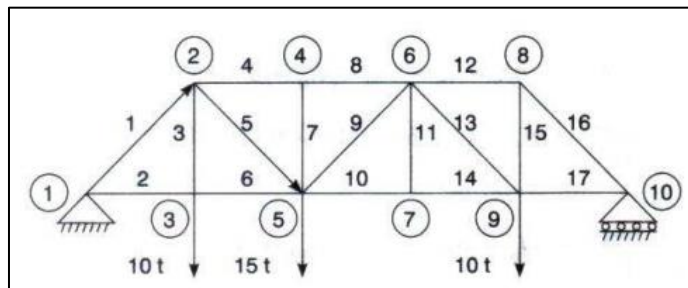
2.3 SISTEMAS LINEARES NA ENGENHARIA

Nesta seção, abordam-se diversos sistemas de equações e suas características, aplicados na engenharia, com foco nas equações lineares e na Engenharia Civil.

2.3.1 Treliça Simples

Ruggiero (1996, p. 105) apresenta a aplicação de sistemas lineares em uma treliça, representada na Figura 1, com objetivo de determinar as forças que atuam em seus nós.

Figura 1- Treliça.



Fonte: Ruggiero (1996, p. 105).

A autora utiliza as condições de equilíbrio estático nos nós para determinar as equações necessárias para obter as forças desconhecidas. É adotado α para representar os ângulos entre as barras, conforme a Figura 2.

Figura 2- Equações por equilíbrio estático nos nós da treliça da Figura 1.

$\text{NÓ 2} \begin{cases} \Sigma F_x = -\alpha f_1 + f_4 + \alpha f_5 = 0 \\ \Sigma F_y = -\alpha f_1 - f_3 - \alpha f_5 = 0 \end{cases}$	$\text{NÓ 7} \begin{cases} \Sigma F_x = -f_{10} + f_{14} = 0 \\ \Sigma F_y = f_{11} = 0 \end{cases}$
$\text{NÓ 3} \begin{cases} \Sigma F_x = -f_2 + f_6 = 0 \\ \Sigma F_y = f_3 - 10 = 0 \end{cases}$	$\text{NÓ 8} \begin{cases} \Sigma F_x = -f_{12} + \alpha f_{16} = 0 \\ \Sigma F_y = -f_{15} - \alpha f_{16} = 0 \end{cases}$
$\text{NÓ 4} \begin{cases} \Sigma F_x = -f_4 + f_8 = 0 \\ \Sigma F_y = -f_7 = 0 \end{cases}$	$\text{NÓ 9} \begin{cases} \Sigma F_x = -\alpha f_{13} - f_{14} + f_{17} = 0 \\ \Sigma F_y = \alpha f_{13} + f_{15} - f_{10} = 0 \end{cases}$
$\text{NÓ 5} \begin{cases} \Sigma F_x = -\alpha f_5 - f_6 + \alpha f_9 + f_{10} = 0 \\ \Sigma F_y = \alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 - 15 = 0 \end{cases}$	$\text{NÓ 10} \begin{cases} \Sigma F_x = -\alpha f_{16} - f_{17} = 0 \end{cases}$
$\text{NÓ 6} \begin{cases} \Sigma F_x = -f_8 - \alpha f_9 + f_{12} + \alpha f_{13} = 0 \\ \Sigma F_y = -\alpha f_9 - f_{11} - \alpha f_{13} = 0 \end{cases}$	

Fonte: Adaptado de Ruggiero (1996, p.105).

Dessa forma, a autora afirma que as matrizes “A”, “x” e “b” do sistema Ax=b são descritas pela Figura 3.

Figura 3- Forma matricial do exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = [0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 15 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0]^T$$

$$x = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9 \ f_{10} \ f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{14} \ f_{15} \ f_{16} \ f_{17}]^T$$

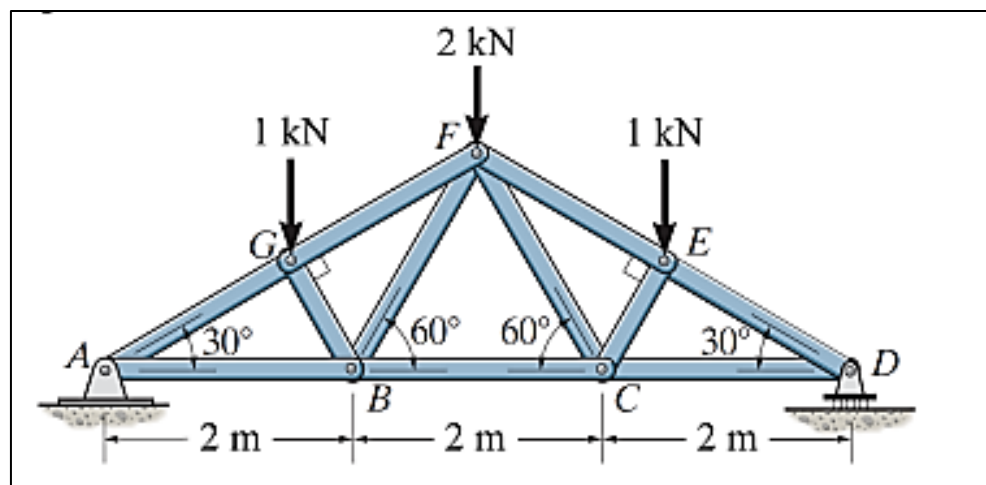
Fonte: Ruggiero (1996, p. 109).

Para resolver o exemplo desta treliça relativamente pequena e encontrar as forças em cada uma das 17 barras, necessita-se resolver o sistema linear de ordem igual a 17. Existem treliças de grandes pontes, por exemplo, que têm milhares de barras, ilustrando a necessidade de métodos de resolução para sistemas lineares de ordem bastante elevada e com muitos termos nulos. Estas características podem ser encontradas também nos exemplos a seguir (seções 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 e 2.3.5).

2.3.2 Treliça Fink

Valiente (2015, p. 55) em sua dissertação de mestrado, apresenta a aplicação de sistemas lineares em uma treliça Fink, ilustrada na Figura 4, muito utilizada em telhados, com o objetivo de determinar os esforços em cada barra.

Figura 4- Treliça Fink



Fonte: Valiente (2015, p. 55).

O autor considera os carregamentos, reações de apoio e ligações das barras nos nós. Dessa forma, obtêm-se as equações presentes na Figura 5.

Figura 5- Equações referentes aos nós da Treliza Fink.

$$\begin{aligned}
 \text{Nó A: } & \begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - F_{AB} - \cos(30^\circ)F_{AG} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - \sin(30^\circ)F_{AG} = 0 \end{cases} \\
 \text{Nó B: } & \begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + \cos(60^\circ)F_{BG} - F_{BC} - \cos(60^\circ)F_{BF} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\sin(60^\circ)F_{BG} - \sin(60^\circ)F_{BF} = 0 \Rightarrow F_{BG} + F_{BF} = 0 \end{cases} \\
 \text{Nó C: } & \begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} + \cos(60^\circ)F_{CF} - F_{DC} - \cos(60^\circ)F_{CE} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\sin(60^\circ)F_{CF} - \sin(60^\circ)F_{CE} = 0 \Rightarrow F_{CF} + F_{CE} = 0 \end{cases} \\
 \text{Nó D: } & \begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{DC} + \cos(30^\circ)F_{DE} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow D_y - \sin(30^\circ)F_{DE} = 0 \end{cases} \\
 \text{Nó E: } & \begin{cases} \nearrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{EF} + \cos(60^\circ)1 - F_{DE} = 0 \\ + \searrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{CE} - \sin(60^\circ)1 = 0 \Rightarrow F_{CE} = 0,86 \end{cases} \\
 \text{Nó F: } & \begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \cos(30^\circ)F_{FG} + \cos(60^\circ)F_{BF} - \cos(30^\circ)F_{EF} - \cos(60^\circ)F_{CF} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \sin(30^\circ)F_{FG} + \sin(60^\circ)F_{BF} + \sin(30^\circ)F_{EF} + \sin(60^\circ)F_{CF} - 2 = 0 \end{cases} \\
 \text{Nó G: } & \begin{cases} \nearrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AG} - F_{FG} - \cos(60^\circ)1 = 0 \Rightarrow F_{AG} - F_{FG} = 0,5 \\ + \nwarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BG} - \sin(60^\circ)1 = 0 \Rightarrow F_{BG} = 0,86 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Fonte: Valiente (2015), adaptado pelo autor.

Dessa forma, o mesmo autor define o sistema linear deste exemplo conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6- Sistema linear da Treliza Fink da Figura 4.

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
 1A_x & -1F_{AB} - 0,86F_{AG} & = 0 \\
 1A_y & -0,5F_{AG} & = 0 \\
 1F_{AB} & +0,5F_{BG} & -0,5F_{BF} & -1F_{BC} = 0 \\
 1F_{BG} & +1F_{BF} & & = 0 \\
 & 0,5F_{CF} & -0,5F_{CE} - 1F_{DC} & +1F_{BC} = 0 \\
 & 1F_{CF} & +1F_{CE} & = 0 \\
 & & 0,86F_{DE} & +1F_{DC} & = 0 \\
 & & -0,5F_{DE} & +1D_y & = 0 \\
 & 1F_{EF} & -1F_{DE} & & = -0,5 \\
 & & 1F_{CE} & & = 0,86 \\
 & 0,86F_{FG} + 0,5F_{BF} & -0,5F_{CF} & -0,86F_{EF} & = 0 \\
 & 0,5F_{FG} + 0,86F_{BF} + 0,86F_{CF} & 0,5F_{EF} & & = 2 \\
 1F_{AG} & -1F_{FG} & & & = 0,5 \\
 1F_{BG} & & & & = 0,86
 \end{array} \right.$$

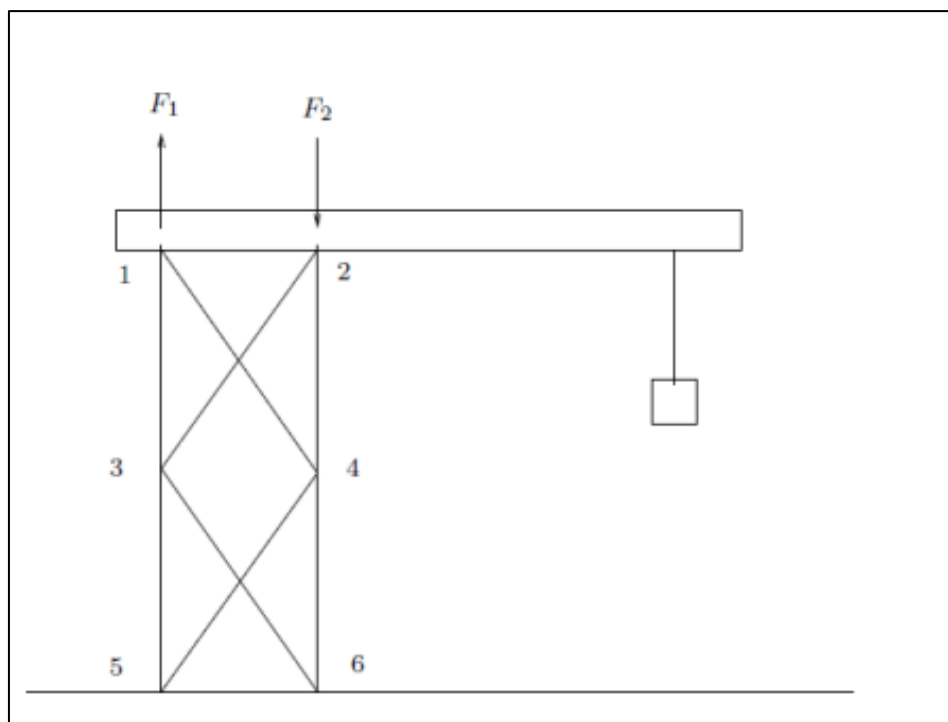
Fonte: Valiente (2015, p. 59).

Na Figura 6, é importante ressaltar que os elementos preenchidos por zero foram ocultados para facilitar a visualização.

2.3.3 Estruturas metálicas

Cruvinel (2013, p. 30) apresenta uma aplicação de sistemas lineares no projeto de uma estrutura metálica (Figura 7). O objetivo do problema é encontrar os valores dos esforços em cada barra.

Figura 7 – Projeto de estrutura metálica.



Fonte: Cruvinel (2013, p. 31).

O autor cita que, para calcular os valores de F_1 e F_2 , deve-se conhecer a massa que será suspensa e o comprimento do braço do guindaste representado na Figura 7. Após isso, deve-se calcular o esforço exercido em cada nó. Para isso, o somatório das forças deve ser nulo tanto horizontalmente quanto verticalmente. Dessa forma, o autor encontra as equações referentes ao problema, conforme a Figura 8 (em forma matricial na Figura 9), onde as forças são escritas por f_{ij} , cujos índices indicam os nós ligados pela viga.

Figura 8- Equações para cada nó da estrutura da Figura 7.

$$\begin{aligned}
 f_{12}\cos\theta_{12} + f_{13}\cos\theta_{13} + f_{14}\cos\theta_{14} &= F_1 \\
 f_{12}\sin\theta_{12} + f_{13}\sin\theta_{13} + f_{14}\sin\theta_{14} &= 0 \\
 \\
 f_{12}\cos\theta_{12} + f_{13}\cos\theta_{13} + f_{14}\cos\theta_{14} &= F_1 \\
 f_{12}\sin\theta_{12} + f_{13}\sin\theta_{13} + f_{14}\sin\theta_{14} &= 0 \\
 f_{21}\cos\theta_{21} + f_{23}\cos\theta_{23} + f_{24}\cos\theta_{24} &= F_2 \\
 f_{21}\sin\theta_{21} + f_{23}\sin\theta_{23} + f_{24}\sin\theta_{24} &= 0 \\
 \\
 f_{31}\cos\theta_{31} + f_{35}\cos\theta_{35} + f_{32}\cos\theta_{32} + f_{36}\cos\theta_{36} &= 0 \\
 f_{31}\sin\theta_{31} + f_{35}\sin\theta_{35} + f_{32}\sin\theta_{32} + f_{36}\sin\theta_{36} &= 0 \\
 f_{41}\cos\theta_{41} + f_{45}\cos\theta_{45} + f_{42}\cos\theta_{42} + f_{46}\cos\theta_{46} &= 0 \\
 f_{41}\sin\theta_{41} + f_{45}\sin\theta_{45} + f_{42}\sin\theta_{42} + f_{46}\sin\theta_{46} &= 0 \\
 f_{35}\sin\theta_{35} + f_{46}\sin\theta_{46} + f_{54}\sin\theta_{54} + f_{63}\sin\theta_{63} &= 0,
 \end{aligned}$$

Fonte: Cruvinel (2013, p. 32).

Figura 9- Forma matricial do sistema linear da Figura 8.

$$\begin{bmatrix}
 \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & \cos\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin\theta_{12} & \sin\theta_{13} & \sin\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos\theta_{12} & 0 & 0 & \cos\theta_{23} & \cos\theta_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin\theta_{12} & 0 & 0 & \sin\theta_{23} & \sin\theta_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\cos\theta_{13} & 0 & -\cos\theta_{23} & 0 & \cos\theta_{35} & \cos\theta_{36} & 0 & 0 \\
 0 & -\sin\theta_{13} & 0 & -\sin\theta_{23} & 0 & \sin\theta_{35} & \sin\theta_{36} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\cos\theta_{14} & 0 & -\cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{46} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta_{35} & \sin\theta_{36} & \sin\theta_{45} & \sin\theta_{46}
 \end{bmatrix} \cdot$$

$$f = \begin{bmatrix} f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{23} & f_{24} & f_{35} & f_{36} & f_{45} & f_{46} \end{bmatrix}^t$$

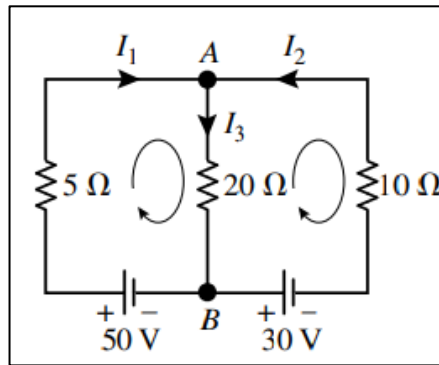
$$\begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t,$$

Fonte: Cruvinel (2013, p. 32).

2.3.4 Circuitos elétricos

Anton e Rorres (2012, p.77) descrevem em sua bibliografia um exemplo contendo um circuito elétrico com três laços fechados, ilustrado pela Figura 10, onde o objetivo é determinar os valores das correntes I_1 , I_2 e I_3 .

Figura 10 - Circuito Elétrico



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 77).

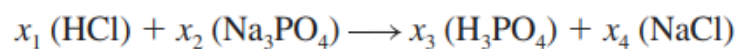
Os autores utilizam a lei das correntes e das tensões de Kirchhoff para encontrar as três equações necessárias. O sistema está representado em sua forma matricial na equação (26).

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & 20 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -30 \\ 80 \end{pmatrix} \quad (26)$$

2.3.5 Equilíbrio de equações químicas

Anton e Rorres (2012, p.80) desenvolvem em sua bibliografia um exemplo que tem como objetivo encontrar os coeficientes de equilíbrio de uma equação química, tema relacionado, por exemplo, com o estudo de materiais de construção de Engenharia Civil. Os coeficientes são nomeados por x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , conforme a Figura 11.

Figura 11 - Equação química.



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 80).

Os autores igualam o número de átomos de cada tipo e obtêm o sistema linear (27).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

2.4 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR FATORAÇÃO QR

Farias, Konzen e Souza (2020, p.89) afirmam que a ideia da FATORAÇÃO QR é transformar o sistema $Ax = b$ em um novo, onde podemos escrever a matriz A , cujas linhas são linearmente independentes, na forma $A = QR$, sendo R uma matriz triangular superior invertível (sua diagonal principal deve conter apenas termos não-nulos) e Q uma matriz constituída por colunas que formam um conjunto ortonormal. Matrizes cujas colunas formam um conjunto ortonormal recebem o nome de matrizes ortogonais que tem, entre outras, as características de que sua inversa é igual à sua transposta e seu determinante tem valor unitário, em módulo.

As matrizes Q e R podem ser encontradas pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Este processo “é um algoritmo para obter uma base ortogonal (ou ortonormal) a partir de uma base qualquer”, (FARIAS, KONZEN E SOUZA, 2020, P.85).

Os autores definem que “uma matriz ortogonal é uma matriz sempre invertível e sua inversa é dada pela sua transposta.”

Segundo os mesmos autores, o método será exemplificado a seguir para um sistema de ordem genérica n , $Ax = b$, apresentado na equação (28).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (28)$$

Além disso, a matriz Q é apresentada na equação (29).

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Os termos da matriz Q (q_{11} , q_{21} e assim sucessivamente), são obtidos por meio da divisão dos termos da matriz Z , que será explicada abaixo, por sua norma euclidiana, denotada pela equação (30).

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{z}_1}{\|\vec{z}_1\|}, \vec{q}_2 = \frac{\vec{z}_2}{\|\vec{z}_2\|}, \dots, \vec{q}_n = \frac{\vec{z}_n}{\|\vec{z}_n\|} \quad (30)$$

É importante ressaltar que $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$ são vetores-coluna da matriz Q , ou seja, $\vec{q}_1^T = (q_{11}, q_{21}, \dots, q_{m1})$, $\vec{q}_2^T = (q_{12}, q_{22}, \dots, q_{m2})$ e assim sucessivamente até $\vec{q}_n^T = (q_{1n}, q_{2n}, \dots, q_{mn})$.

Além disso, a matriz Z é apresentada na equação (31).

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Os termos da matriz Z são encontrados pela equação (32).

$$\vec{z}_j = \vec{a}_j - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_1 \rangle}{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 \rangle} \vec{z}_1 - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_2 \rangle}{\langle \vec{z}_2, \vec{z}_2 \rangle} \vec{z}_2 - \dots - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_{j-1} \rangle}{\langle \vec{z}_{j-1}, \vec{z}_{j-1} \rangle} \vec{z}_{j-1} \quad (32)$$

Onde:

j é o contador que representa o identificador da coluna da matriz;

$\langle \vec{a}_j, \vec{z}_j \rangle$ é o produto interno entre o vetor $\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ e o vetor $\vec{z}_j = (z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{mj})^T$, definido pela equação (33).

$$\langle \vec{a}_j, \vec{z}_j \rangle = (a_{1j} \cdot z_{1j} + a_{2j} \cdot z_{2j} + \dots + a_{mj} \cdot z_{mj}) \quad (33)$$

Sendo $\|\vec{z}_j\|$ definida pela equação (34).

$$\|\vec{z}_j\| = \sqrt{(z_{1j})^2 + (z_{2j})^2 + \dots + (z_{mj})^2} \quad (34)$$

É importante ressaltar que $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n$ são vetores-coluna da matriz Z , ou seja, $\vec{z}_1^T = (z_{11}, z_{21}, \dots, z_{m1})$, $\vec{z}_2^T = (z_{12}, z_{22}, \dots, z_{m2})$ e assim sucessivamente até $\vec{z}_n^T = (z_{1n}, z_{2n}, \dots, z_{mn})$.

Para encontrar a matriz R , temos que $A = QR$. Logo, $R = Q^{-1}A$. Além disso, utiliza-se a ortogonalidade, que é representada pela equação (35).

$$Q^{-1} = Q^T \quad (35)$$

Sendo assim, para o exemplo descrito anteriormente, tem-se a equação (36).

$$R = AQ^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Como a premissa do método é desenvolver $A = QR$, podemos reescrever o sistema $Ax = b$ como $QRx = b$ ou até mesmo $Rx = Q^{-1}b$. Resolve-se, portanto, $Q^{-1}b = y$ e, por fim, $Rx = y$.

Uma das vantagens da fatoração QR é a mesma encontrada na resolução de sistemas lineares por fatoração LU que, de acordo com Ruggiero e Lopes (1996), possibilita resolver qualquer sistema linear que tenha A como matriz dos coeficientes e, caso somente o vetor b seja alterado, a nova solução do sistema linear passa somente pela resolução de $Rx = y$.

Segue um exemplo numérico para o sistema linear $Ax = b$ representado pela equação (37).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Os vetores da primeira e segunda coluna da matriz A são, respectivamente, $\vec{a}_1 = (1; 3)$ e $\vec{a}_2 = (2; -5)$. Dessa forma, o vetor da primeira coluna da matriz Z é igual a $\vec{a}_1$. Logo, $\vec{z}_1 = \vec{a}_1 = (1; 3)$. Para a segunda coluna utiliza-se a equação (38).

$$\vec{z}_2 = (2; -5)^T - \frac{\langle (2; -5)(1; 3) \rangle}{\langle (1; 3)(1; 3) \rangle} (1; 3)^T \quad (38)$$

Efetua-se o produto interno dos vetores e multiplica-se o vetor $\vec{z}_1$ pelo resultado, conforme a equação (39).

$$\vec{z}_2 = (2; -5) - \frac{(-13)}{10} (1; 3) = (2; -5) - (-1,3; -3,9) = (3,3; -1,1) \quad (39)$$

Deve-se calcular a norma euclidiana dos vetores $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$.

$$||\vec{z}_1|| = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,162 ; ||\vec{z}_2|| = \sqrt{(3,3)^2 + (-1,1)^2} = 3,478 \quad (40)$$

Para calcular os termos da matriz Q divide-se $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$ por suas normas euclidianas.

$$\vec{q}_1 = \frac{(1;3)}{3,162} = (0,316 ; 0,950) ; \vec{q}_2 = \frac{(3,3;-1,1)}{3,478} = (0,950 ; -0,316) \quad (41)$$

Dessa forma, tem-se todos os termos da matriz Q , representada pela equação (42).

$$Q = \begin{pmatrix} 0,316 & 0,950 \\ 0,950 & -0,316 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Para calcular a matriz R , utiliza-se a equação (43).

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 0,316 & 0,950 \\ 0,950 & -0,316 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,166 & -4,118 \\ 0 & 3,480 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Para determinar a matriz y , faz-se $Q^T b = y$, apresentado na equação (44).

$$y = \begin{pmatrix} 0,316 & 0,950 \\ 0,950 & -0,316 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,38 \\ 3,486 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Por fim, tem-se $Rx = y$, apresentado na equação (45).

$$\begin{pmatrix} 3,166 & -4,118 \\ 0 & 3,480 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,38 \\ 3,486 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Para facilitar a compreensão para determinar os valores de x , representa-se as equações do sistema nas equações (46) e (47).

$$\begin{cases} 3,116x_1 - 4,118x_2 = 5,28 \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} 0x_1 + 3,48x_2 = 3,486 \end{cases} \quad (47)$$

Resolve-se a equação (47), cujo resultado está na equação (48).

$$x_2 = \frac{3,486}{3,480} = 1,002 \quad (48)$$

Substitui-se o valor de x_2 na equação (46) e encontra-se o valor de x_1 (equação (49)).

$$x_1 = \frac{9,398}{3,116} = 3,01 \quad (49)$$

Dessa forma, a solução do sistema acima é $x = (1,002; 3,01)^T$.

2.5 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES PELO MÉTODO S.O.R

O MÉTODO S.O.R (*SUCCESSIVE OVER RELAXATION*) é um método numérico para resolução de sistemas lineares desenvolvido a partir do método de Gauss-Seidel. Wandresen (1980, p. 89) afirma que o MÉTODO S.O.R “é o Método de “Gauss-Seidel extrapolado”, ou seja, acelerado pelo fator de relaxação ω .

Wandresen (1980) acrescenta que, para facilitar a escolha de valores para ω , deve-se levar em consideração dois teoremas: o teorema de Kahan, que afirma que, se cada termo da diagonal da matriz dos coeficientes A for não-nulo ($a_{ii} \neq 0$ para todo valor de i), o método converge apenas para $0 < \omega < 2$, e o teorema desenvolvido por Ostrowski (1954), citado por Wandresen (1980), que define que, para um sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes A é positiva definida, há certeza de convergência do método para o intervalo $0 < \omega < 2$, qualquer que seja a aproximação inicial de x .

Schmidt (2012) afirma que o S.O.R é excelente para acelerar a convergência na resolução de sistemas de equações lineares. Porém, o mesmo autor acrescenta que o fato de os teoremas existentes serem aplicáveis apenas a um grupo específico

de sistemas de equações lineares, gera dificuldade de obter o melhor valor para o parâmetro de relaxação para qualquer sistema de equações não enquadrado nos teoremas e, além disso, não garante convergência para qualquer matriz A , o que torna o método não muito utilizado.

Franco (2006) afirma que uma matriz real simétrica A , $n \times n$, é positiva definida se todos os seus menores principais líderes (determinantes das submatrizes de A , constituídas retirando as k últimas linhas e k últimas colunas, para $k = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$), são positivos. Para maior compreensão, segue-se a verificação sobre se a matriz da equação (50) é positiva definida ou não.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 12 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Os menores principais líderes de F , para $k=2$, $k=1$ e $k=0$, respectivamente, estão na equação (51).

$$1, \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \right), \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 12 \end{bmatrix} \right) \quad (51)$$

Como $\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \right) < 0$, a matriz F não é positiva definida.

Além disso, Wandresen (1980) conclui que, para $\omega = 1$, o método se torna idêntico ao Método de Gauss-Seidel.

Schmidt (2012) compara o Método Gauss-Seidel com o Método S.O.R. No Método de Gauss-Seidel, cada iteração utiliza o valor mais atual de x , e sua relação é dada pela equação (52).

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \quad (52)$$

Segundo o mesmo autor, o Método S.O.R é um melhoramento do método de Gauss-Seidel, onde o termo ω acelera a convergência. Sua fórmula de recorrência, partindo de valores $x_i^{(0)}$, é deduzida de acordo com a equação (53).

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega) x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \quad (53)$$

Onde:

i é o índice referente à solução x , igual a 1 até a ordem do sistema;

n é a ordem do sistema;

k é o índice referente à iteração;

a_{ij} é o valor de cada elemento da matriz A ;

b_i é o valor de cada elemento do vetor B ;

j é o contador;

ω é o parâmetro de relaxação.

Nota-se, pela equação (53), que o parâmetro de relaxação não pode ser nulo, pois levaria infinitamente à solução da próxima iteração ser igual à da iteração anterior.

Além disso, o autor declara que, se a matriz dos coeficientes A for simétrica positiva definida e tridiagonal (uma matriz quadrada que possui elementos diferentes de zero apenas na diagonal principal e nas diagonais secundárias acima e abaixo da diagonal principal), a opção ótima para ω é dada pela equação (54).

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [p(T_j)]^2}} \quad (54)$$

Para encontrar $p(T_j)$, deve-se encontrar o $\det(T_j - \lambda I) = 0$, sendo a matriz λI definida pela equação (55), para um exemplo de ordem 3.

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (55)$$

O mesmo autor define T_j , na equação (56).

$$T_j = D^{-1}(L + U) \quad (56)$$

Para compreender as matrizes D , L e U , devemos revisar os conceitos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Para o sistema linear $Ax = b$, Wandresen (1980) define as matrizes D , L e U , pelas equações (57), (58) e (59), respectivamente.

$$D = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ a_{ij}, & \text{se } i = j; \end{cases} \quad (57)$$

$$L = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j; \\ a_{ij}, & \text{se } i > j; \end{cases} \quad (58)$$

$$U = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i > j; \\ a_{ij}, & \text{se } i < j; \end{cases} \quad (59)$$

Segue um exemplo numérico, encontrado na bibliografia de Schmidt (2012), com matriz A simétrica positiva tridiagonal. Seja um sistema linear descrito pela equação (60).

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 51 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Para determinar o parâmetro ω deve-se, primeiramente, calcular T_j . Para o exemplo acima, define-se as matrizes D , L e U na equação (61).

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Sendo assim, obtém-se na equação (62).

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (62)$$

Efetua-se $L + U$ e multiplica-se o resultado por D^{-1} (equação (63)).

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

Para encontrar $p(T_j)$, o primeiro passo é calcular $T_j - \lambda I$, conforme equação (64).

$$T_j - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & -\lambda & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & -\lambda \end{pmatrix} \quad (64)$$

Sendo assim, calcula-se o determinante e iguala-se a zero pela equação (65), com o resultado na equação (66).

$$-\lambda^3 + \frac{17\lambda^2}{81} = 0 \quad (65)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{17}}{9} \quad (66)$$

Por fim, aplica $p(T_j) = \frac{\sqrt{17}}{9}$ na equação (54) para encontrar o parâmetro de relaxação ω .

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{17}}{9}\right]^2}} = 1,058823529 \quad (67)$$

Dessa forma, utiliza-se $\omega = 1,058823529$ na equação (53) e encontra-se a seguinte relação de recorrência representada pelas equações (68) a (70), para cada iteração k .

$$x_1^{(k)} = (0,058823529)x_1^{(k-1)} + \frac{1,058823529}{9}(20 - 4x_2^{(k-1)}) \quad (68)$$

$$x_2^{(k)} = (0,058823529)x_2^{(k-1)} + \frac{1,058823529}{9}(12 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}) \quad (69)$$

$$x_3^{(k)} = (0,058823529)x_3^{(k-1)} + \frac{1,058823529}{9}(51 + x_2^{(k)}) \quad (70)$$

A solução está na Figura 12.

Figura 12 - Solução do exemplo pelo Método S.O.R

ITERAÇÃO	x1	x2	x3	ERRO REL. (%)
1	2.352888888888889	0.3045161086419753	6.035691295092236	100
2	2.0712405085199452	1.1292135796518505	5.777813722752508	73.03290412643982
3	1.6997171300388585	1.2252141504620027	5.804270857825394	21.85795341561293
4	1.676386969416307	1.2336605069965656	5.803708845205196	1.3916930307967479
5	1.6737841151725597	1.2343225889357616	5.803819781809177	0.15550716607672818
6	1.6736256019544382	1.2343713023908127	5.80381898960422	0.009471247209431244
7	1.6736119990622378	1.2343747460599266	5.803819441314411	0.0008127864886274778
8	1.6736111783981404	1.2343749828996646	5.8038194426167315	0.00004903552915621887
9	1.6736111152016717	1.2343749988655528	5.803819444418452	0.00000377605455357851
10	1.6736111114044319	1.2343749999256173	5.803819444437222	2.2688902039485625e-7
11	1.6736111111288667	1.2343749999951688	5.803819444444301	1.6465302150585325e-8
12	1.6736111111123406	1.2343749999996885	5.803819444444416	9.87452443463492e-10

Fonte: Elaborado pelo autor (2021) com base nas equações (68) a (72)

Além disso, para entender o cálculo do erro relativo utilizado pelo autor, deve-se compreender a definição de norma vetorial. A norma vetorial para um vetor qualquer v de n linhas, é definido pela equação (71).

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (71)$$

O erro relativo empregado pelo autor está representado na equação (72).

$$Erro\ relativo\ 1 = ||x_{(k)}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_{(k)}^2} \quad (72)$$

Para o exemplo tratado, com solução inicial $x(0)=(0,0,0)$, na Tabela 1, Schmidt (2012) compara os métodos S.O.R (Figura 12), Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi e conclui que, para uma tolerância de 10^{-10} , os resultados obtidos pelo método S.O.R exigiram menos iterações.

Tabela 1- Comparação do número de iterações alcançadas pelos MÉTODOS S.O.R, Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi, na resolução do sistema (60) por Schmidt (2012).

Método	S.O.R	Gauss-Seidel	Gauss-Jacobi
Iterações	12	18	31

Fonte: Elaborado pelo autor (2021) com base na bibliografia de Schmidt (2012)

2.6 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES PELO MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

Conforme Santos (2008), o método dos GRADIENTES CONJUGADOS representa um método de relaxação iterativo que tem como premissa substituir o processo de encontrar a solução do sistema $Ax = b$ pelo problema de encontrar o ponto minimizador da função auxiliadora $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$.

Porém, Franco (2006, p. 168) cita que, para entender o motivo da escolha da função auxiliadora, se faz necessário a compreensão de alguns conceitos que são a base do método. Tais conceitos estão descritos na sequência.

O primeiro conceito é que, para uma função $y = f(x)$, o valor de x_0 onde $f'(x_0) = 0$ recebe o nome de ponto estacionário. Além disso, para entender se este ponto é de mínimo, máximo ou de inflexão, deve-se calcular a derivada a segunda da função. Dessa forma, se $f''(x_0) > 0$, o ponto x_0 é ponto de mínimo; se $f''(x_0) < 0$, o ponto x_0 é ponto de máximo e, para $f''(x_0) = 0$, o ponto x_0 é ponto de inflexão.

Do cálculo, sabe-se que o gradiente de uma função $\nabla f(x)$ é um vetor que indica o sentido e a direção na qual a função apresenta o maior valor possível. O gradiente de uma função y com n variáveis, ou seja $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde o

gradiente de f é simbolizado por $\nabla f(x)$, é definido conforme a equação (73), sendo que $f'(x_1)$ é a derivada parcial de f em relação a x_1 e assim sucessivamente até $f'(x_n)$.

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (73)$$

Dessa forma, “o ponto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ em que $\nabla f(x) = 0$ recebe o nome de ponto estacionário da função f .”

Para saber se o ponto é de mínimo, máximo ou de inflexão, deve-se calcular as derivadas parciais de 2ª (segunda) ordem, expressas na equação (74).

$$A(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (74)$$

Se a matriz A for positiva definida, ou seja, $x^T A x > 0$ para todo vetor $x \neq 0$, P é ponto de mínimo. Dessa forma, para que o processo de solução do sistema $Ax = b$ seja substituído por encontrar o ponto minimizador da função $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$, a matriz A deve ser positiva definida.

Após definidos os conceitos matemáticos pertinentes apresentados, Franco (2006) faz a dedução do Método dos Gradientes Conjugados conforme o que segue.

Por se tratar de um método iterativo, ele parte de um sistema $Ax - b \neq 0$, onde a solução x para o sistema $Ax = b$ é encontrada por meio de uma sequência de iterações k . Essa perturbação entre o vetor b e o valor atualizado de $Ax^{(k)}$ recebe o nome de resíduo. A primeira iteração do Métodos dos Gradientes Conjugados é expressa pelas equações (75), (76), (77), (78) e (79).

$$r^{(k-1)} = Ax^{(k-1)} - b \quad (75)$$

Para diminuir o resíduo definido pela equação (75), indica-se uma direção a ser seguida para corrigir os novos valores de $x^{(k)}$. Como o objetivo é minimizar a função, adota-se a direção oposta ao $\nabla f(x)$ como direção a ser seguida.

$$-\nabla f(x^{(k)}) = Ax^{(k-1)} - b = r^{(k-1)} \quad (76)$$

Santos (2008) afirma que obtém-se uma sequência de valores de x que convergem para a solução do sistema $Ax = b$, definida pela equação (77).

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \nabla f(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} + r^{(k-1)} \quad (77)$$

Para regular o tamanho dos passos, adota-se o parâmetro α (equação (78)).

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \alpha_{(k-1)} \nabla f(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} + \alpha_{(k-1)} r^{(k-1)} \quad (78)$$

Onde α , de acordo com Santos (2008), é calculado pela equação (79).

$$\alpha_{(k-1)} = \frac{(r^{(0)})^T r^{(0)}}{(r^{(0)})^T A r^{(0)}} \quad (79)$$

Andretta e Toledo (2012) completam que o grande diferencial do método é a escolha de n direções linearmente independentes $(d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(n)})$ e, por meio da minimização da função em cada uma das direções separadamente, construir uma sequência de aproximações que forneça o mínimo da função auxiliadora após n passos, para um sistema de ordem igual a n .

Conforme Andretta e Toledo (2012), para $k=1$, adota-se $d^{(1)} = -r^{(0)}$. Porém, nas demais iterações, faz-se a combinação linear do resíduo e da direção adotada na iteração anterior, definida pela equação (80), sendo β , chamado parâmetro regularizador, calculado pela equação (81).

$$d^{(k)} = -r^{(k-1)} + \beta_{(k-1)} d^{(k-1)} \quad (80)$$

$$\beta_{(k-1)} = \frac{r^{(k-1)T} r^{(k-1)}}{r^{(k-2)T} r^{(k-2)}} \quad (81)$$

Para calcular os próximos valores de x , tem-se a equação (82).

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \gamma_{(k)} d^{(k)} \quad (82)$$

Onde:

k é o índice referente à iteração;

γ é o parâmetro utilizado para regular o tamanho dos passos na equação (83) abaixo;

d é a direção de minimização da função auxiliadora.

As mesmas autoras afirmam que $\gamma_{(k)}$ é calculado pela equação (83).

$$\gamma_{(k)} = \frac{r^{(k-1)T} r^{(k-1)}}{d^{(k)T} A d^{(k)}} \quad (83)$$

Para definir o critério de parada do método, Andretta e Toledo (2012) comparam erros relativos com um erro relativo alvo. As autoras adotam três erros relativos que partem da norma euclidiana definida pela equação (70). O primeiro, segundo e terceiro tipo de erro relativo estão representados nas equações (84), (85) e (86), respectivamente.

$$\text{Erro relativo 1} = \|r_{(k-1)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n r_{(k-1)}^2} \quad (84)$$

$$Erro\ relativo\ 2 = \|x_{(k)} - x_{(k-1)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{(k)} - x_{(k-1)})^2} \quad (85)$$

$$Erro\ relativo\ 3 = (\|x_{(k)} - x_{(k-1)}\|) / \|x_{(k)}\| = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{(k)} - x_{(k-1)})^2} \right) / \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{(k)}^2} \right) \quad (86)$$

Para a verificação do erro, vale o menor valor entre os três tipos calculados. Além disso, repete-se as iterações até que o erro relativo calculado seja menor que a tolerância estabelecida e/ou alcance o número máximo de iterações, que também é estabelecido previamente.

Andretta e Toledo (2012) apresentam, em sua bibliografia, um exemplo numérico para o sistema linear $Ax=b$, descrito pela equação (87).

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

As autoras adotam a solução inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ e estabelecem tolerância de 10^{-2} . Para $k=1$, tem-se o r^0 descrito pela equação (88).

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (88)$$

O próximo passo é calcular o Erro relativo 1 descrito pela equação (84).

$$Erro\ relativo\ 1 = \sqrt{(-11)^2 + (-11)^2 + (-1)^2} = 15,58 \quad (89)$$

Dessa forma, deve-se prosseguir. Calcula-se o parâmetro α pela equação (79).

$$\alpha = \frac{(-11 \ -11 \ -1) \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}}{(-11 \ -11 \ -1) \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}} = \frac{243}{2694} = 0,0902 \quad (90)$$

Além disso, para $k=1$, tem-se $\vec{d}_1 = -\vec{r}_1$.

Dessa forma, o valor de x é dado pela equação (91).

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0,0902 \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9922 \\ 0,9922 \\ 0,0902 \end{pmatrix} \quad (91)$$

Calcula-se os erros relativos 2 e 3, de acordo com as equações (92) e (93).

$$Erro\ relativo\ 2 = \sqrt{0,9922^2 + 0,9922^2 + 0,0902^2} = 1,4060 \quad (92)$$

$$\text{Erro relativo 3} = \frac{\sqrt{0,9922^2 + 0,9922^2 + 0,0902^2}}{\sqrt{0,9922^2 + 0,9922^2 + 0,0902^2}} = 1 \quad (93)$$

Como os erros relativos são maiores que o erro relativo alvo, atualiza-se o resíduo.

$$r^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9922 \\ 0,9922 \\ 0,9922 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0858 \\ 0,0044 \\ 0,8942 \end{pmatrix} \quad (94)$$

O próximo passo é calcular o Erro relativo 1 descrito pela equação (95).

$$\text{Erro relativo 1} = \sqrt{(-0,0858)^2 + (0,0044)^2 + (0,8942)^2} = 0,89832 \quad (95)$$

Como o erro relativo é maior que o erro relativo alvo, para $k = 2$, calcula-se o parâmetro β pela equação (81).

$$\beta_{(k-1)} = \frac{(-0,0858 \quad -0,0044 \quad 0,8942) \begin{pmatrix} -0,0858 \\ 0,0044 \\ 0,8942 \end{pmatrix}}{(-11 \quad -11 \quad -1) \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}} = \frac{0,807}{243} = 0,00332 \quad (96)$$

Sendo assim, calcula-se $d^{(2)}$ (equação (97)), sendo o parâmetro $\gamma_{(k)}$ obtido pela equação (98).

$$d^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,0858 \\ -0,0044 \\ -0,8942 \end{pmatrix} + 0,00332 \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1221 \\ 0,0319 \\ -0,8909 \end{pmatrix} \quad (97)$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{(-0,0858 \quad -0,0044 \quad 0,8942) \begin{pmatrix} -0,0858 \\ 0,0044 \\ 0,8942 \end{pmatrix}}{(0,1221 \quad 0,0319 \quad -0,8909) \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1221 \\ 0,0319 \\ -0,8909 \end{pmatrix}} = 0,1003 \quad (98)$$

Calcula-se os valores de $x^{(2)}$ (equação (99)).

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,9922 \\ 0,9922 \\ 0,9922 \end{pmatrix} + 0,1003 \begin{pmatrix} 0,1221 \\ 0,0319 \\ -0,8909 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0044 \\ 0,9954 \\ 0,0008 \end{pmatrix} \quad (99)$$

Calcula-se os erros relativos 2 e 3, de acordo com as equações (100) e (101).

$$\text{Erro relativo 2} = \sqrt{0,0122^2 + 0,0032^2 + (-0,0894)^2} = 0,0902 \quad (100)$$

$$\text{Erro relativo 3} = \frac{\sqrt{0,0122^2 + 0,0032^2 + (-0,0894)^2}}{\sqrt{1,0044^2 + 0,9954^2 + 0,0008^2}} = 0,0637 \quad (101)$$

Dessa forma, para $k=3$ calcula-se os novos valores do resíduo (equação (102)).

$$r^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1221 \\ 0,0319 \\ -0,8909 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,0858 \\ 0,0044 \\ 0,8942 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0399 \\ -0,0407 \\ 0,0038 \end{pmatrix} \quad (102)$$

Sendo assim, *Erro relativo 1* = $\|r^{(2)}\| = 0,0571$. Portanto, para $k=3$ tem-se o parâmetro β pela equação (103).

$$\beta_{(k-1)} = \frac{(0,0399 \quad -0,0407 \quad 0,0038) \begin{pmatrix} 0,0399 \\ -0,0407 \\ 0,0038 \end{pmatrix}}{(-0,0858 \quad 0,0044 \quad 0,8942) \begin{pmatrix} -0,0858 \\ 0,0044 \\ 0,8942 \end{pmatrix}} = \frac{0,00326}{0,8069} = 0,004 \quad (103)$$

Atualiza-se a direção $d^{(k)}$ (equação (104)).

$$d^{(3)} = \begin{pmatrix} -0,0399 \\ 0,0407 \\ -0,0038 \end{pmatrix} + 0,004 \begin{pmatrix} 0,1221 \\ 0,0319 \\ -0,8909 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0394 \\ 0,0406 \\ -0,0076 \end{pmatrix} \quad (104)$$

Encontra-se o parâmetro $\gamma_{(k)}$ (equação (105)).

$$\gamma_{(3)} = \frac{(0,0399 \quad -0,0407 \quad 0,0038) \begin{pmatrix} 0,0399 \\ -0,0407 \\ 0,0038 \end{pmatrix}}{(-0,0394 \quad 0,0406 \quad -0,0076) \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,0394 \\ 0,0406 \\ -0,0076 \end{pmatrix}} = 0,1128 \quad (105)$$

Dessa forma, tem-se o valor de x (equação (106)).

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,0044 \\ 0,9954 \\ 0,0008 \end{pmatrix} + 0,1128 \begin{pmatrix} -0,0394 \\ 0,0406 \\ -0,0076 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (106)$$

Para finalizar, calcula-se os erros relativos 2 e 3 (equações (107) e (108)).

$$\text{Erro relativo 2} = \sqrt{(-0,0044)^2 + 0,0046^2 + (-0,0008)^2} = 0,00641 \quad (107)$$

$$\text{Erro relativo 3} = \frac{\sqrt{(-0,0044)^2 + 0,0046^2 + (-0,0008)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = 0,00453 \quad (108)$$

Como $0,00465 < 0,01$ a solução do sistema é $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$.

Dessa forma, encerra-se aqui a fundamentação teórica referente aos três métodos desenvolvidos neste trabalho e se faz, no próximo item, uma breve apresentação sobre as tecnologias de programação para a Web, empregadas neste trabalho para implementar programas referentes aos métodos e cálculos citados.

2.7 PROGRAMAÇÃO DE PÁGINAS WEB

Considerando os objetivos específicos anunciados quanto a implementar rotinas computacionais para emissão de relatórios envolvendo memorial de cálculo, a teoria e todo o raciocínio utilizado nos métodos, bem como a disponibilização de módulos de programa *on-line* para auxiliar alunos, professores e profissionais no estudo dos métodos utilizados, faz-se necessário lançar mão do emprego de

tecnologias para programação de páginas dinâmicas para a *Web*. Neste contexto, mostra-se imprescindível oferecer suporte à apresentação de informações e também à implementação de rotinas associadas ao tratamento de eventos provocados pelos usuários nas interfaces gráficas, como cliques com botões, e realização dos cálculos requeridos. Assim as tecnologias HTML (*Hyper Text Markup Language* – Linguagem de Marcação de Hipertexto) e JavaScript foram estudadas, exploradas e aplicadas. Esta subseção apresenta informações fundamentais sobre elas.

2.7.1 HTML

Flatschart (2011, p. 21) declara que “HTML é a principal linguagem utilizada na *Web*” para criar documentos digitais a partir da definição de elementos textuais (título, parágrafos, listas, links e tabelas) e outros que possibilitam a inclusão de mídias digitais, como por exemplo, vídeos.

Segundo Lemay (2002, p.49), as páginas *Web* (documentos que podem ser visualizados através de navegadores *Web*) escritas em HTML, são arquivos em texto que não contêm qualquer particularidade de algum programa ou navegador, qualquer editor que suporte textos pode ler os códigos. Além disso, a autora destaca que alguns navegadores e sistemas operacionais podem usar estilos de fontes diferentes uns dos outros. A página projetada pode parecer perfeita no seu navegador, mas em outro navegador esta poderá ser apresentada de forma diferente.

A mesma autora completa que “os arquivos em HTML contém o texto da própria página e as *tags* que são responsáveis por indicar elementos de página, estrutura, formatação e links de hipertexto[...]”, ou seja, o HTML é uma linguagem para a descrição da estrutura de um documento e não sua verdadeira apresentação, “o HTML não diz nada sobre qual será a aparência de uma página quando ela for visualizada. As *tags* HTML simplesmente indicam que um elemento é um cabeçalho ou uma lista[...]”.

Além disso, não é possível criar *tags* para novas aparências, sendo que o HTML possui um conjunto de *tags* definido para ser utilizado. As *tags* HTML são representadas por duplas de comandos de marcação que determinam o início e o final de aplicação de um recurso de formatação como tamanho de fontes, definição de parágrafo, entre outros. Lemay (2002, p. 49) provê um exemplo de *tags* de início e fim para parágrafos, descritas como “<p>” e “</p>”, respectivamente. Segurado (2016)

descreve que a primeira *tag* utilizada em qualquer página HTML é <html>, pois tem função de indicar que será utilizada essa linguagem. Logo, todos os comandos deverão estar entre as *tags* <html> e </html>.

Lemay (2002, p. 51) explica como criar uma página *Web* simples utilizando html. Basta copiar o código descrito na Figura 13 em qualquer editor de texto e salvá-lo em extensão .html. A autora sugere utilizar nomes pequenos e simples, sem caracteres especiais ou acentuados.

Figura 13 - Exemplo de código para página *Web*.

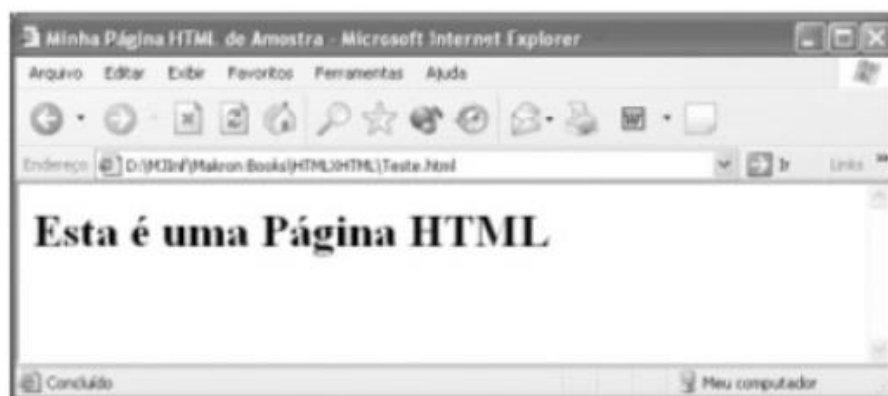
```
<!DOCTYPE html PUBLIC "-//W3C//DTD XHTML 1.0 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/xhtml1/DTD/transitional.dtd">
<html>
<head>

<title>Minha Página HTML de Amostra</title>
</head>
<body>
<h1>Esta é uma Página HTML </h1>
</body>
</html>
```

Fonte: Lemay (2002, p. 51).

Para visualizar os resultados, basta abrir seu arquivo utilizando um navegador (pode ser *offline*). Caso o seu programa esteja faltando alguma parte, não é necessário sair do navegador para modificá-lo, basta utilizar seu editor para fazer as correções, salvar o arquivo e, em sequência, retornar para o navegador e atualizar a página. O resultado dos códigos da Figura 13 pode ser observado na Figura 14.

Figura 14 - Exemplo de Página *Web*.



Fonte: Lemay (2002, p. 53).

Porém, a HTML apresenta algumas limitações, como por exemplo não permite a criação de *tags* de formatação adicionais e não permite criar interatividade com o usuário. Para contornar essa limitação, outras tecnologias podem ser empregadas em conjunto, como o PHP (*Hypertext Preprocessor*) e o JavaScript (seção 2.7.2) para adicionar maior interatividade com o usuário.

2.7.2 Javascript

Apesar do nome ser similar ao Java, JavaScript e Java são linguagens completamente diferentes. Segurado (2016, p. 67) pontua que “JavaScript é considerada uma linguagem de alto nível, dinâmica e conveniente” e que “não é preciso ir muito longe para entender que é uma das linguagens de programação mais importantes da atualidade e uma das tecnologias que todo desenvolvedor *Web* deve conhecer”. Flatschart (2011, p. 23) acrescenta que “mesmo quem não é programador é capaz de inserir fragmentos de código JavaScript no HTML”.

Para Segurado (2016, p. 67), o primeiro passo para compreender JavaScript é estudar a estrutura léxica, que nada mais é do que um conjunto de regras que guiam a escrita nessa linguagem. Essa estrutura detalha como são as variáveis e os caracteres delimitadores para comentários. Além disso, o autor acrescenta que os espaços em branco são desconsiderados.

A linguagem JavaScript apresenta identificadores próprios, conhecidos como palavras reservadas. Segurado (2016, p. 69) organiza essas palavras em um quadro, representado na Figura 15.

Figura 15 – Palavras reservadas para a programação em linguagem JavaScript.

Break	delete	function	return	typeof
Case	do	if	switch	var
Catch	else	in	this	void
Continue	false	instanceof	throw	while
Debugger	finally	new	true	with
Default	for	null	try	

Fonte: Segurado (2016, p. 69).

O mesmo autor afirma que é possível realizar operações mais complexas, por meio de um conjunto de funções definidas em objetos embutidos ou em bibliotecas. A Figura 16 apresenta alguns exemplos de propriedade e métodos associados a funções matemáticas, disponíveis no objeto embutido “Math.”.

Figura 16- Algumas propriedades Math.

<code>Math.log (10)</code>	// Logaritmo natural de 10
<code>Math.pow (3, 1/3)</code>	// A raiz cúbica de 3
<code>Math.PI</code>	// π : circunferência de um círculo/diâmetro
<code>Math.E</code>	// e: a base do logaritmo natural
<code>Math.sqrt (3)</code>	// A raiz quadrada de 3
<code>Math.exp (3)</code>	// Math.E ao cubo

Fonte: Segurado (2016, p. 72).

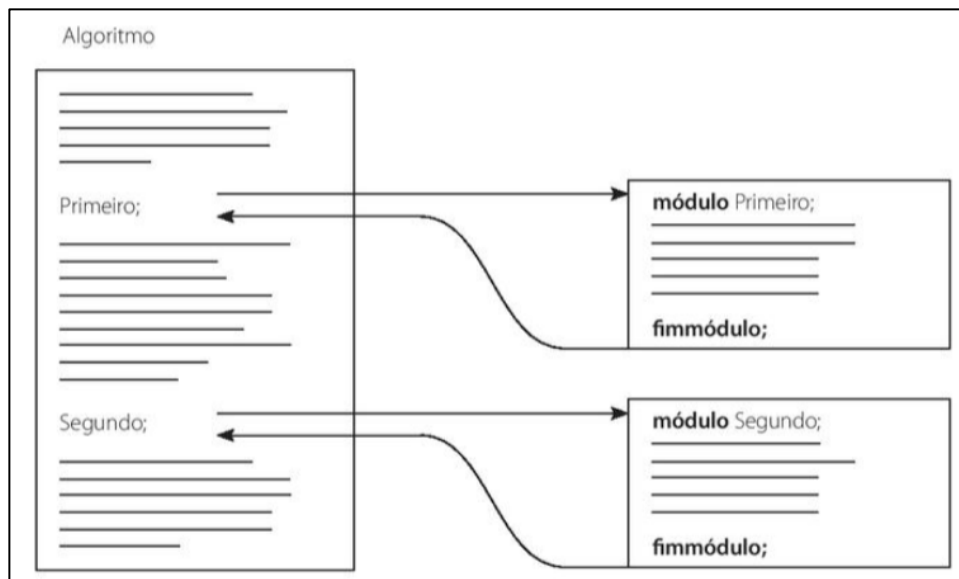
Além disso, o autor afirma que as instruções na linguagem JavaScript podem ser classificadas como condicionais, laços e saltos. As condicionais, *if* e *switch* por exemplo, estabelecem condições e o interpretador pode continuar executando o programa ou ignorar as instruções seguintes, dependendo das condições. Os laços, como por exemplo o *while*, são as que efetuam instruções repetidas vezes. Os saltos, como por exemplo o *return* e o *break*, pulam um pedaço do código, dependendo dos valores encontrados.

2.7.3 Otimização de algoritmos

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foram utilizadas algumas técnicas de otimização dos algoritmos, como modularizações, uso de funções, sub-rotinas e bibliotecas de funções.

Leme (2015, p. 61) descreve a modularização como um “procedimento de programação em que o sistema ou *software* é dividido em partes separadas, onde os módulos irão operar separadamente, porém de modo simultâneo”. A Figura 17 exemplifica essa definição.

Figura 17- Esquema da modularização de algoritmos.



Fonte: Forbellone e Eberspächer (2005, p.133), citado por Leme (2015, p. 61).

Além disso, “existem várias funções preestabelecidas em cada linguagem, todas com a finalidade de realizar uma operação específica já conhecida.” Leme (2015, p.62). Como por exemplo, a função para multiplicar números por 2, descrita pela Figura 18.

Figura 18 - Função Exemplo

```
Function MultiplyTwo(num1, num2) As Double
    MultiplyTwo = num1 * num2
End Function
```

Fonte: Leme (2015, p. 65).

Uma sub-rotina é uma forma fundamental de se implementar a modularização. De acordo com Ascencio e Veneruchi (2012, p. 230) o código de uma sub-rotina pode ser utilizado várias vezes e, para executá-la basta chamá-la em seu programa principal. A Figura 19 expressa um exemplo apresentado pelas mesmas autoras.

Figura 19 - Exemplo de sub-rotina.

```

1      ALGORITMO
2      DECLARE sal NUMÉRICO
3      LEIA sal
4      aum ← calculo (sal)
5      novo_sal ← sal + aum
6      ESCREVA "Novo salário é", novo_sal
7      FIM_ALGORITMO

8      SUB-ROTINA calculo (sal NUMÉRICO)
9      DECLARE perc, valor NUMÉRICO
10     LEIA perc
11     valor ← sal * perc / 100
12     RETORNE valor
13     FIM_SUB_ROTINA calculo

```

Fonte: Ascencio e Veneruchi (2012, p. 230)

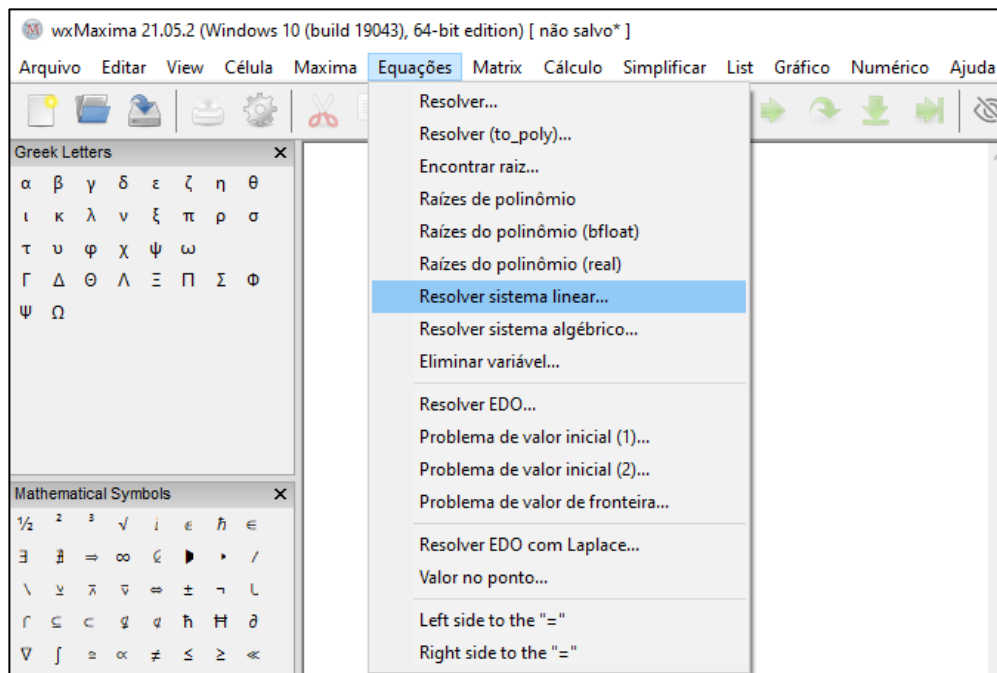
Considerando a Figura 19, o programa principal (localizado entre as linhas 1 e 7) é executado linearmente até a linha 4, onde chama a sub-rotina (localizada entre as linhas 8 e 13). O programa principal fica suspenso e a sub-rotina é executada até a linha 13 e, em seguida, volta para o programa principal exatamente na linha que ocorreu a chamada (linha 4). Após isso, o programa é executado até a linha 7.

As bibliotecas de funções, por sua vez, são arquivos que apresentam conjuntos de funções, sub-rotinas e modularizações que podem ser inseridas em programas. Elas são importantes pois o programador não precisa criar o código desde o início. Caso algum programador já tenha desenvolvido a tarefa, pode-se agilizar todo o processo de programação.

2.8 SOFTWARES PARA CÁLCULO DE SISTEMAS LINEARES

Com o objetivo de ilustrar outras ferramentas que fazem funções parecidas com as informatizações relatadas neste trabalho, nesta seção, mencionam-se softwares para cálculo de sistemas lineares bem como suas características, dados de entrada, dados de saída e um breve manual de utilização. Utiliza-se, nesta seção, o mesmo exemplo para os três softwares.

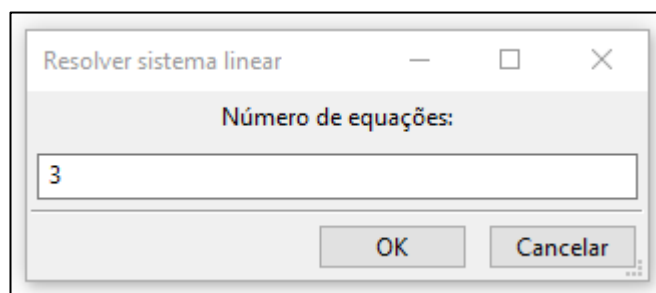
Figura 21 - Instruções para o acesso da área de sistemas lineares.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Após, deve-se inserir o número de equações do sistema. Será mostrado um exemplo com três equações, conforme as Figuras 22 e 23.

Figura 22- Caixa referente ao número de equações.

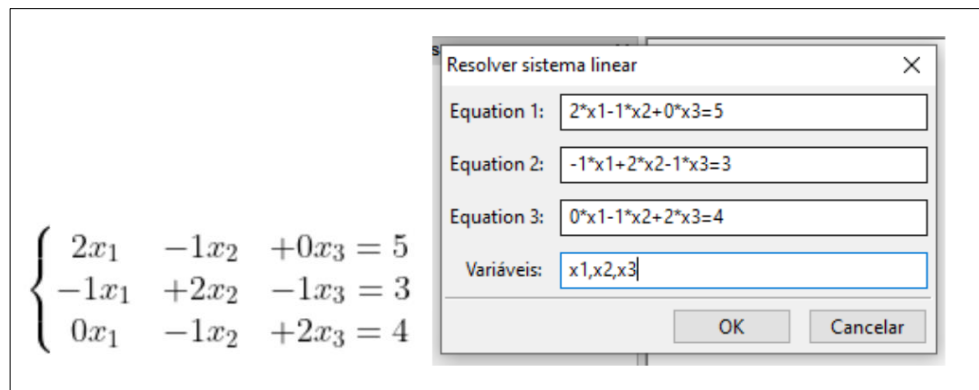


Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Logo após, aparece a caixa representada à direita na Figura 21, onde, nas três primeiras linhas devem-se inserir as equações e, na última, identificar quais são as variáveis do sistema.

Durante a escrita das equações, é importante colocar “*” entre os coeficientes e as variáveis.

Figura 23- Exemplo de sistema.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Após clicar em “OK”, na caixa da Figura 23, o software fornece a solução do sistema (Figura 24).

Figura 24- Solução do sistema.

$$\left[x1 = \frac{25}{4}, x2 = \frac{15}{2}, x3 = \frac{23}{4} \right]$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O *software* fornece apenas o resultado final e não a resolução completa.

2.8.2 Matrix calculator

Matrix calculator (2013) é uma página *Web* que atua como calculadora de matrizes. Nela, é possível efetuar todas as operações básicas envolvendo matrizes: determinante, matriz inversa, matriz transporta, multiplicação, soma, subtração dentre outras. A página também possibilita encontrar soluções de sistemas lineares pelo método de Gauss e Gauss-Jordan.

Ao acessar a página, tem-se parte da tela expressa na Figura 25. Para acessar a área referente a sistemas lineares deve-se clicar em “Soluções de Sistemas de Equações Lineares” destacado na lateral esquerda.

Para exemplificar a resolução, utiliza-se o Método de Gauss para o mesmo exemplo de sistema linear descrito na seção 2.8.1. (Figura 27).

Figura 27- Exemplo de sistema

O sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x_1 + -1x_2 + 0x_3 = 5 \\ -1x_1 + 2x_2 + -1x_3 = 3 \\ 0x_1 + -1x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Na Figura 26, ao clicar em “Solução utilizando o Método de Gauss” obtém-se a solução para o sistema, bem como todo o passo a passo utilizado, conforme a Figura 28.

Figura 28- Resolução passo a passo do exemplo.

Solução utilizando o **Método de Gauss**

(Algoritmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\times \left(\frac{1}{2} \right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{11}{2} \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\times \left(\frac{2}{3} \right)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{11}{2} \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{23}{3} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 = 5 \\ \frac{3}{2} \cdot x_2 - x_3 = \frac{11}{2} \\ \frac{4}{3} \cdot x_3 = \frac{23}{3} \end{cases} \quad (1)$$

- Da equação 3 do sistema (1) obtemos a variável x_3 :

$$\frac{4}{3} \cdot x_3 = \frac{23}{3}$$

$$x_3 = \frac{23}{4}$$

- Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável x_2 :

$$\frac{3}{2} \cdot x_2 = \frac{11}{2} + x_3 = \frac{11}{2} + \frac{23}{4} = \frac{45}{4}$$

$$x_2 = \frac{15}{2}$$

- Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável x_1 :

$$2x_1 = 5 + x_2 = 5 + \frac{15}{2} = \frac{25}{2}$$

$$x_1 = \frac{25}{4}$$

Resposta:

$$x_1 = \frac{25}{4}$$

$$x_2 = \frac{15}{2}$$

$$x_3 = \frac{23}{4}$$

A solução geral: $X = \begin{pmatrix} \frac{25}{4} \\ \frac{15}{2} \\ \frac{23}{4} \end{pmatrix}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

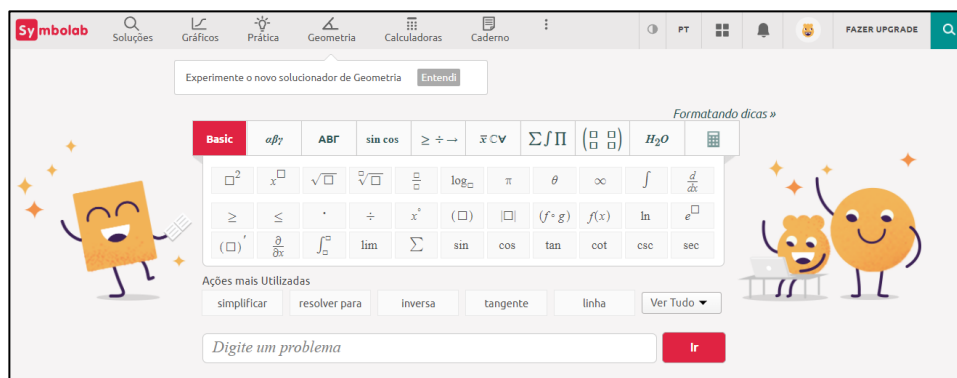
A solução por este *software* foi idêntica a resolução feita pelo *Software* Maxima.

2.8.3 Symbolab

O Symbolab (2021) é um *site* que apresenta calculadoras a respeito de diversas áreas do conhecimento. Dentre elas, destacam-se a pré-álgebra, álgebra, pré-cálculo, cálculo, funções, matrizes, trigonometria, estatística dentre outras.

Ao acessar a página, tem-se a tela expressa na Figura 29.

Figura 29- Tela inicial do Symbolab



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Para acessar a área de sistemas lineares, basta clicar no botão “Soluções”, ilustrado por uma lupa e localizado no menu superior. Após isso, deve-se clicar em “Álgebra” e, em seguida “Sistemas de equações”. Dessa forma, aparece a tela ilustrada pela Figura 30, onde podem-se inserir as equações, aparecendo exemplos para facilitar a compreensão. É necessário separar as equações por vírgula.

Figura 30- Campo para inserir as equações.

[Painel completo »](#)

x^2	$x^\square$	$\log_\square$	$\sqrt{\square}$	$\sqrt[\square]{\square}$	$\leq$	$\geq$	$\frac{\square}{\square}$	$\cdot$	$\div$	x°	π
$(\square)'$	$\frac{d}{dx}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\int$	$\int_\square^\square$	$\lim$	$\sum$	∞	θ	$(f \circ g)$	H_2O	$\begin{pmatrix} \square & \dots & \square \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \square & \dots & \square \end{pmatrix}$

Ações mais Utilizadas

substituição eliminação cramer gauss jordan simplificar Ver Tudo ▼

Ir

[Exemplos »](#) 🔗 🖨️ 📄

Exemplos

$x + y + z = 25, 5x + 3y + 2z = 0, y - z = 6$ 🔍

$x + 2y = 2x - 5, x - y = 3$ 🔍

$5x + 3y = 7, 3x - 5y = -23$ 🔍

$x + z = 1, x + 2z = 4$ 🔍

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O exemplo (o mesmo que vem sendo usado nesta seção 2.8) se encontra na Figura 31. As incógnitas x_1, x_2 e x_1, x_2 foram substituídas por x,y e z, respectivamente.

Figura 31- Exemplo de sistema

$2x + -1y + 0z = 5, -1x + 2y + -1z = 3, 0x + -1y + 2z = 4$ 🔖 Ir

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

A versão gratuita apenas possibilita resolver pelo do método de substituição e mostra apenas alguns passos da resolução (o que se mostra na Figura 32). Já na versão paga, é possível resolver por regra de Cramer e eliminação de Gauss. No canto direito da figura têm-se a opção “Mostrar passos”, porém, está disponível apenas para versão paga.

Figura 32- Resolução do exemplo.

Passos

$$\begin{cases} 2x + (-1)y + 0 \cdot z = 5 \\ -1 \cdot x + 2y + (-1)z = 3 \\ 0 \cdot x + (-1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

Isolar x de $2x + (-1)y + 0z = 5$: $x = \frac{5+y}{2}$ [Mostrar passos](#) 

Substituir $x = \frac{5+y}{2}$

$$\begin{cases} -1 \cdot \frac{5+y}{2} + 2y + (-1)z = 3 \\ 0 \cdot \frac{5+y}{2} + (-1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

Simplificar [Mostrar passos](#) 

$$\begin{cases} -z + \frac{-5+3y}{2} = 3 \\ 2z - y = 4 \end{cases}$$

Isolar z de $-z + \frac{-5+3y}{2} = 3$: $z = -\frac{-3y+11}{2}$ [Mostrar passos](#) 

Substituir $z = -\frac{-3y+11}{2}$

$$2\left(-\frac{-3y+11}{2}\right) - y = 4$$

Simplificar [Mostrar passos](#) 

$$2y - 11 = 4$$

Isolar y de $2y - 11 = 4$: $y = \frac{15}{2}$ [Mostrar passos](#) 

Para $z = -\frac{-3y+11}{2}$

Substituir $y = \frac{15}{2}$

$$z = -\frac{-3 \cdot \frac{15}{2} + 11}{2}$$

$-\frac{-3 \cdot \frac{15}{2} + 11}{2} = \frac{23}{4}$ [Mostrar passos](#) 

$$z = \frac{23}{4}$$

Para $x = \frac{5+y}{2}$

Substituir $z = \frac{23}{4}, y = \frac{15}{2}$

$$x = \frac{5 + \frac{15}{2}}{2}$$

$\frac{5 + \frac{15}{2}}{2} = \frac{25}{4}$ [Mostrar passos](#) 

$$x = \frac{25}{4}$$

As soluções para o sistema de equações são:

$$x = \frac{25}{4}, z = \frac{23}{4}, y = \frac{15}{2}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

3 METODOLOGIA

Nesta seção, abordam-se todos os processos e ferramentas envolvidas no desenvolvimento deste trabalho. A metodologia foi dividida em parte teórica e parte prática.

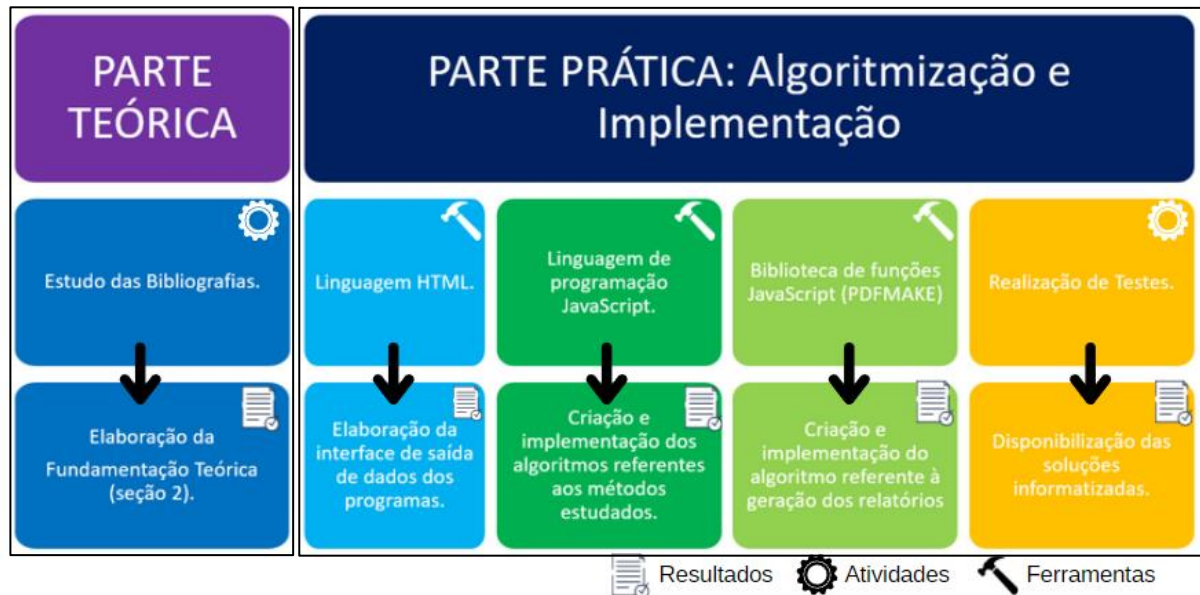
A parte teórica consiste do estudo das bibliografias, referenciadas neste trabalho, para a compreensão dos métodos utilizados e, além disso, elaboração da fundamentação teórica apresentada na seção 2.

A parte prática, por sua vez, consiste no uso da linguagem HTML para a elaboração das interfaces de saída dos programas, representadas na seção 4.1.1. Para a algoritmização das soluções informatizadas para a resolução de sistemas lineares pela Fatoração QR, Método S.O.R e Método dos Gradientes Conjugados, utiliza-se a linguagem JavaScript. Os fluxogramas referentes aos algoritmos estão mostrados na seção 4.1. Para a implementação do algoritmo referente ao relatório, utiliza-se a biblioteca de funções JavaScript PDFMAKE. Além disso, foram feitos testes para validar as informatizações antes de serem disponibilizadas. Dois exemplos destes testes estão descritos na seção 4.2.

É importante ressaltar que foi utilizado o W3Schools (1998) como fonte de estudos, visto que apresenta tutoriais e é uma referência para programadores em linguagens de desenvolvimento *Web*. Além disso, para editar os códigos, foi utilizado o NOTEPAD++, versão desenvolvida por Ho (2021).

A Figura 33 ilustra a metodologia deste trabalho.

Figura 33- Metodologia deste trabalho



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O relatório foi programado para mostrar os dados iniciais inseridos pelo usuário, a teoria resumida do método, todo o processo de cálculo e, além disso, todas as referências utilizadas. Exemplos de relatórios apresentam-se nos apêndices A, C e D.

4 RESULTADOS

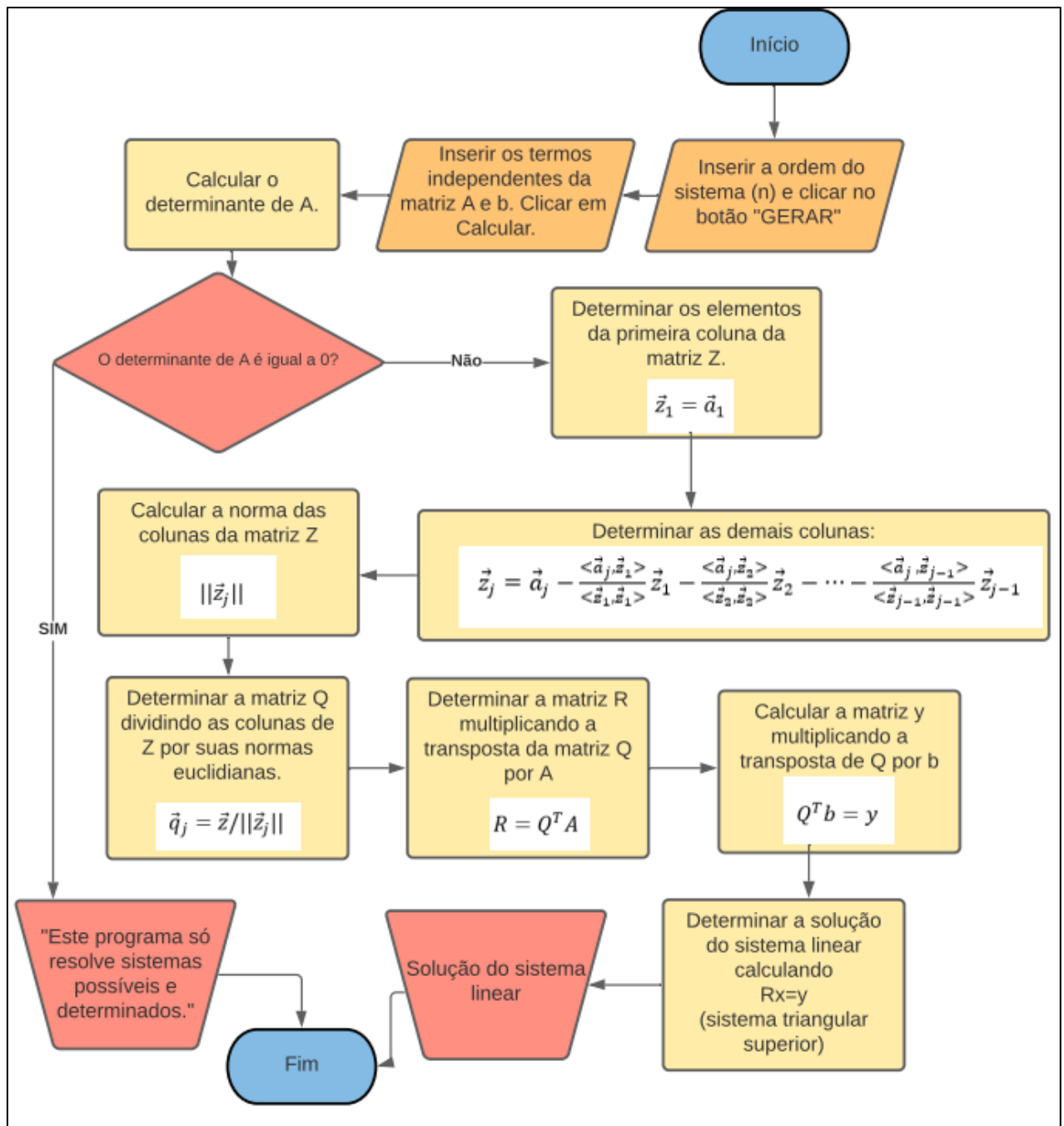
Os programas aqui desenvolvidos correspondem à resolução de sistemas lineares por métodos diferentes, um pela FATORAÇÃO QR, outro pelo MÉTODO S.O.R e outro pelo MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS. Esses programas, ainda que em fase de testes, já estão disponíveis *online*, em Núcleo de Engenharia Virtual (2015).

Além da revisão da bibliografia utilizada (seção 2) e da elaboração dos algoritmos (seção 3.1), apresenta-se, nesta seção, passo-a-passo, exemplos referentes aos métodos desenvolvidos neste trabalho. O objetivo desta seção é também descrever a utilização dos programas e, além disso, validá-los com o auxílio de exemplos encontrados em bibliografias e *softwares* já desenvolvidos.

4.1 ALGORITMOS PRINCIPAIS E SEUS FLUXOGRAMAS

Após o clique para acessar os programas, os algoritmos principais e fluxogramas descritos nas Figuras (35) a (40) apresentam os macropassos para o cálculo da solução do sistema $Ax=b$ pela Fatoração QR, Método S.O.R e Método dos Gradientes Conjugados, respectivamente.

Figura 34 - Fluxograma Fatoração QR.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

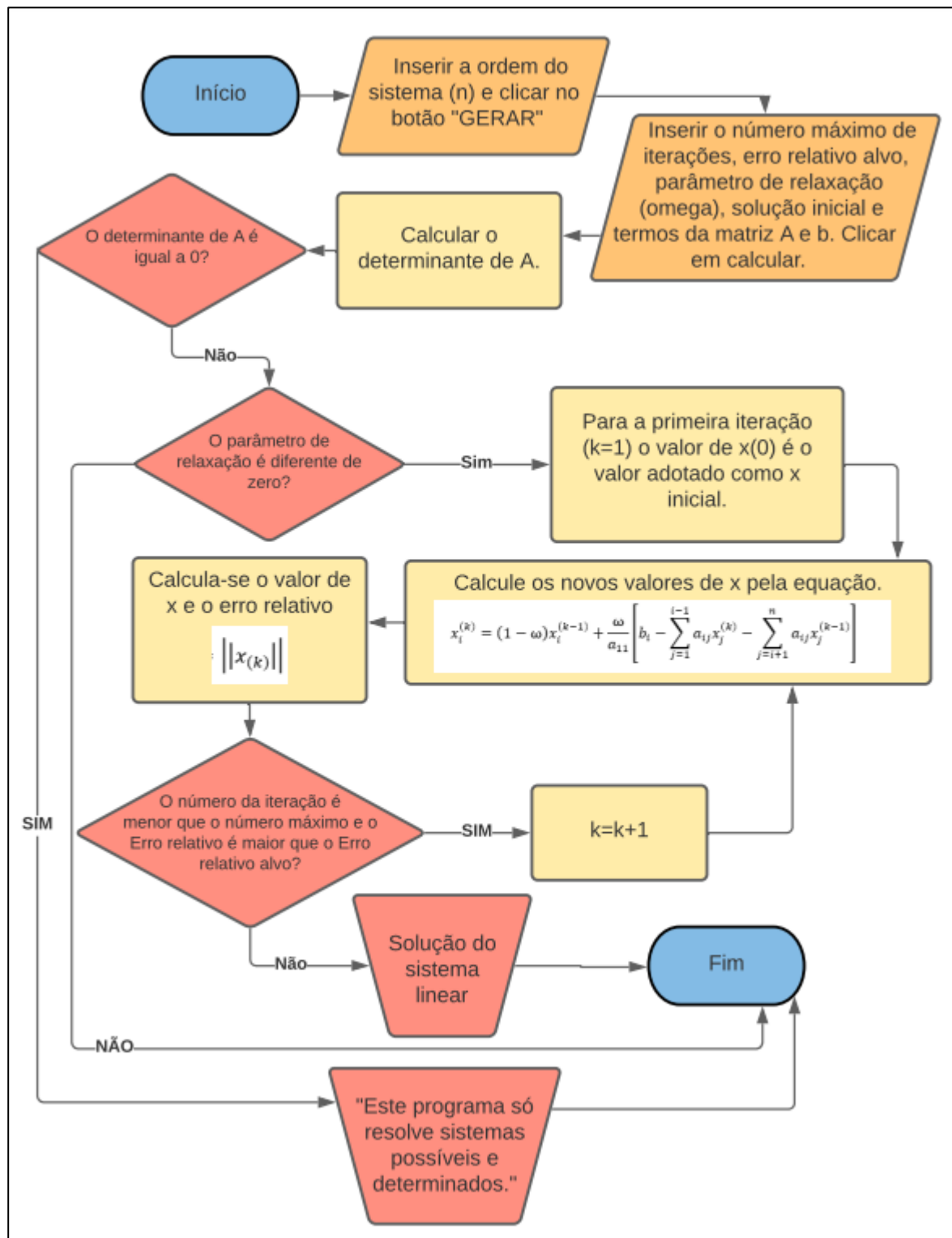
Figura 35 - Algoritmo principal do Método QR.

Sistemas Lineares pela Fatoração QR	
Entrada:	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$
Saída:	$x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$
1	$\vec{z}_j = \vec{a}_j$
2	enquanto $j > 1$ faça
3	$\vec{z}_j = \vec{a}_j - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_1 \rangle}{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 \rangle} \cdot \vec{z}_1 - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_2 \rangle}{\langle \vec{z}_2, \vec{z}_2 \rangle} \cdot \vec{z}_2 - \dots - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_{j-1} \rangle}{\langle \vec{z}_{j-1}, \vec{z}_{j-1} \rangle} \cdot \vec{z}_{j-1}$
4	fim
5	$\vec{q}_j = \frac{\vec{z}_j}{\ \vec{z}_j\ };$
6	$R = Q^T \cdot A;$
7	$Q^T \cdot b = y;$
8	$R \cdot x = y$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

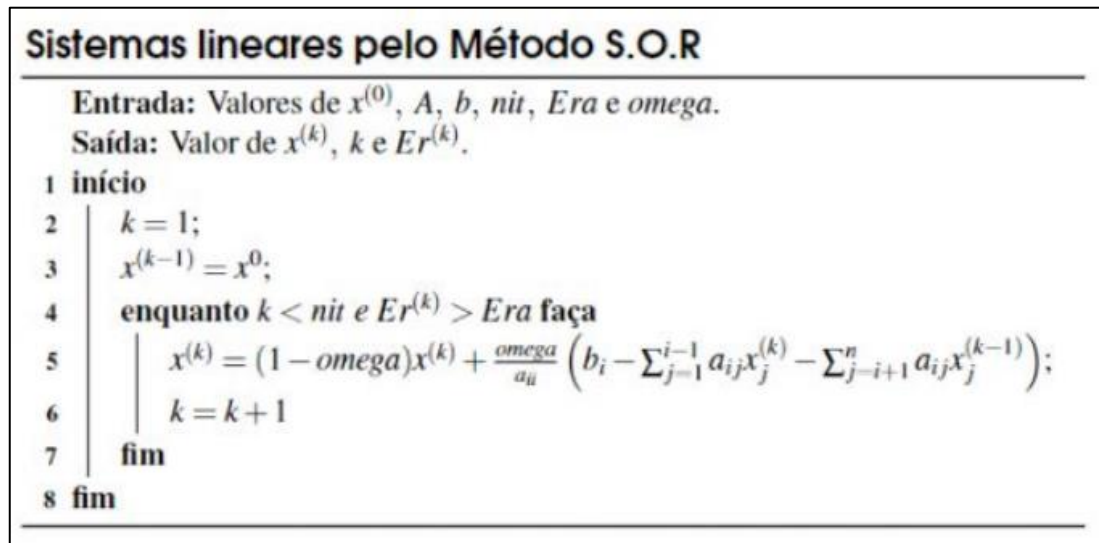
A implementação do algoritmo principal do Método QR em *Javascript* encontra-se no Apêndice E.

Figura 36- Fluxograma Método S.O.R



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

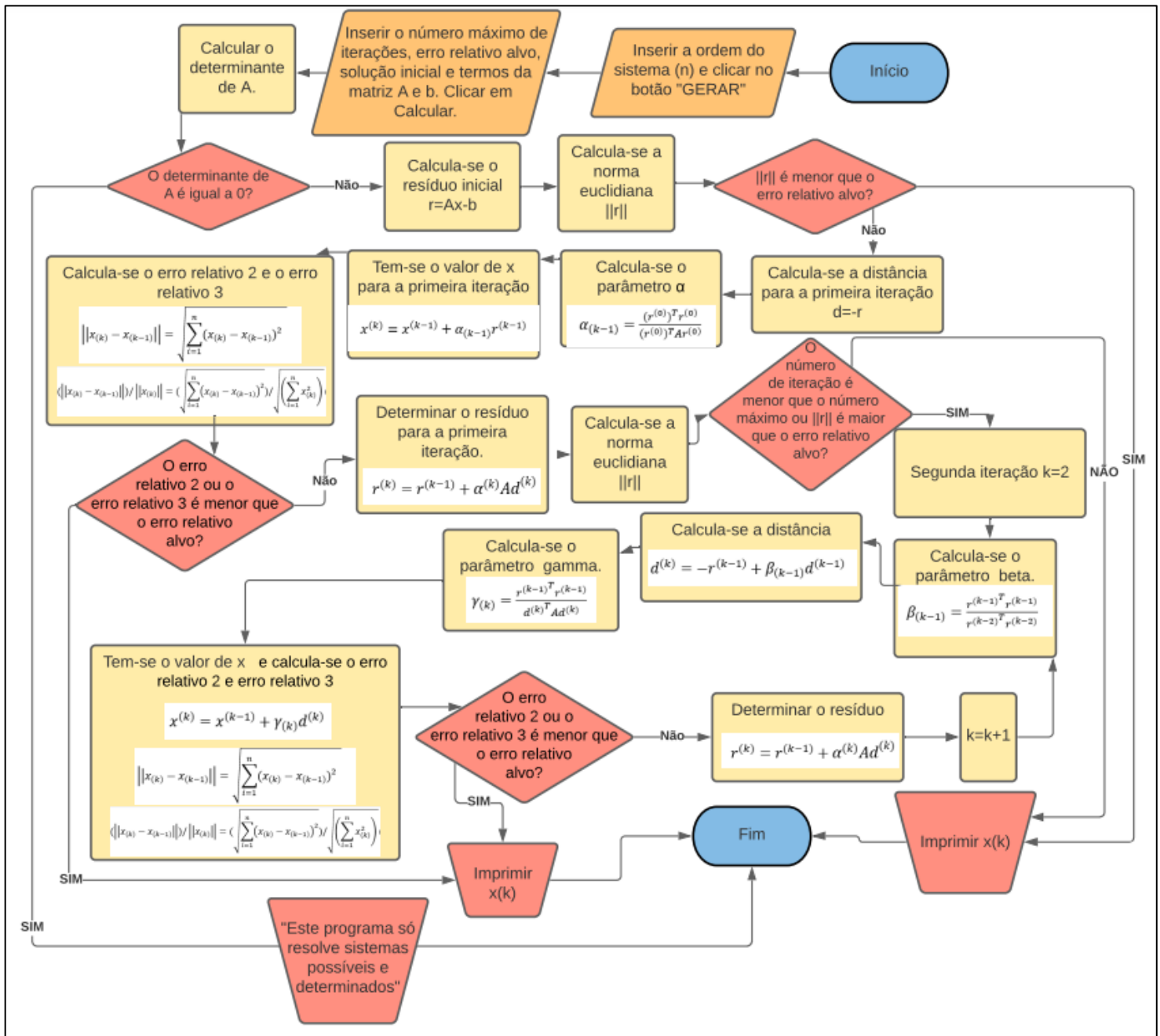
Figura 37 - Algoritmo principal do Método S.O.R



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

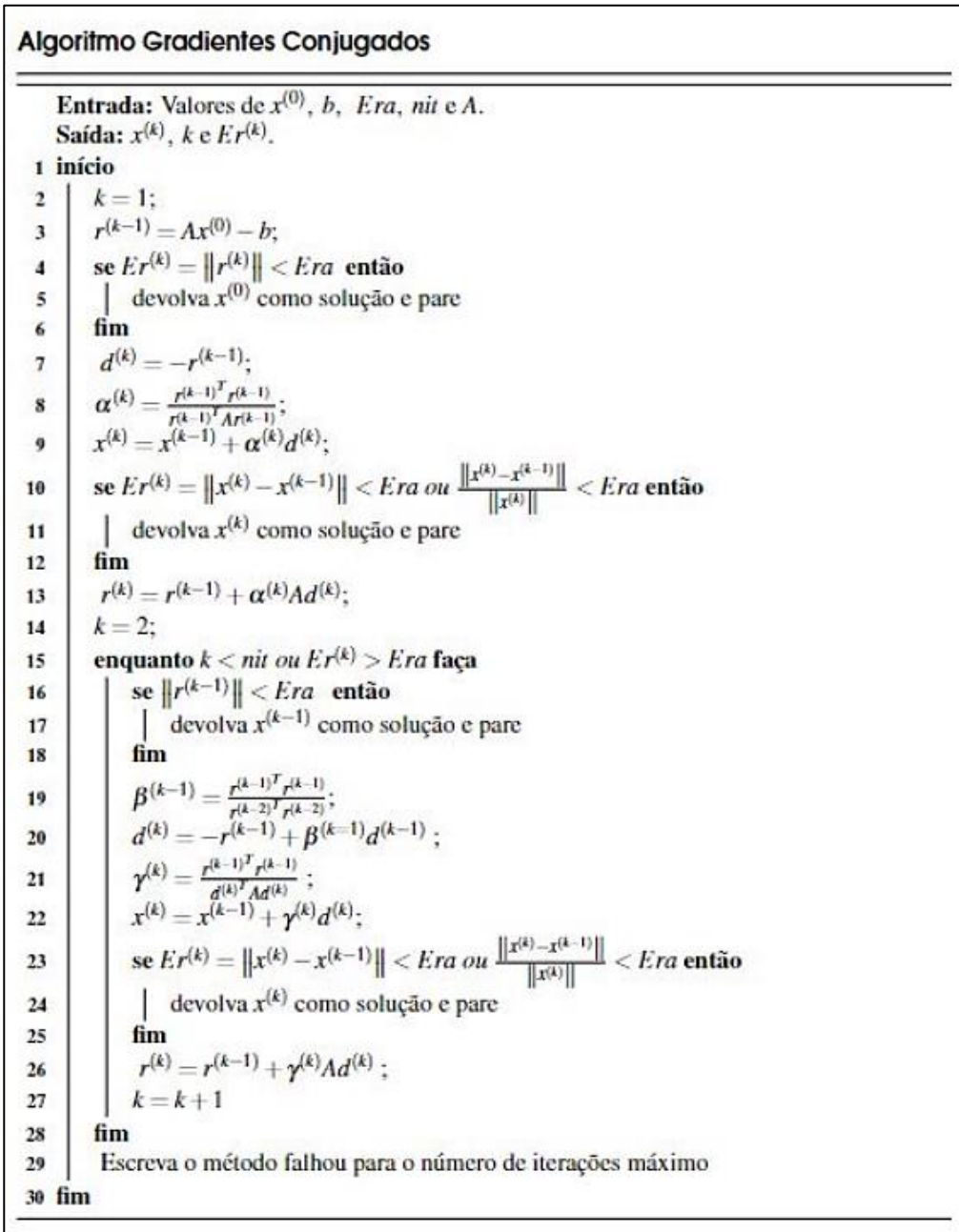
A implementação do algoritmo principal do Método S.O.R em *Javascript* encontra-se no Apêndice E.

Figura 38- Fluxograma Método dos Gradientes Conjugados



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Figura 39 - Algoritmo principal do Método dos Gradientes Conjugados.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

A implementação do algoritmo principal do Método dos Gradientes Conjugados em *Javascript* encontra-se no Apêndice E.

Como indicado nos fluxogramas das Figuras 35, 37 e 39, os programas resolvem somente sistemas cuja matriz A tenha determinante não-nulo, ou seja, sejam possíveis e determinados.

Além disso, caso o sistema inserido pelo usuário seja muito grande (ordem maior do que 6), as informatizações presentes neste trabalho contêm o algoritmo (Figura 40) que aumenta a largura da página.

Figura 40 - Algoritmo para aumentar a largura da página.

```
if (n<=6) {  
    lp=630;  
    ap=840;  
}  
else{  
    lp=630+(n-6)*90;  
    ap=840;  
}
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

4.2 PLATAFORMA NEV

Os três programas foram desenvolvidos e implementados no portal do Núcleo de Engenharia Virtual (2015). O objetivo do portal é disponibilizar resultados de pesquisas da área de Edificações do IFSP campus Votuporanga. Dentre os resultados, o NEV disponibiliza programas gratuitos sobre Engenharia e Cálculo Numérico que geram relatórios em PDF de todos os cálculos desenvolvidos. Além de programas de resolução de sistemas lineares, entre outros, destacam-se o IFESTRUT, *software* criado com módulos de análise estrutural e o IFESTIMA, *software* para orçamento estimado-detalhado de edificações. O acesso é possível a partir do endereço Web do Portal do NEV (<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/>). A Figura 41 constitui-se a partir de fragmentos de uma página extensa do NEV, onde as reticências indicam ocultação de trechos.

Figura 41 - Recorte da tela do NEV.

ÁREAS: Análise de Estruturas -- Cálculo Numérico -- Construção Civil -- Dimensionamento de estruturas -- Mecânica dos Solos -- Planejamento e orçamento						
Área: Análise de Estruturas -- TOPO						
Título e link	Data	Autor	Orientador	Tipo	Curso	Documentação
APOSTILA DIAGRAMAS ISOSTÁTICA	12/04/2019	Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl	-	-	Engenharia Civil	-
COMPARAÇÃO MEF X MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS	23/04/2020	Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl	-	-	Engenharia Civil	-
(...)						
SISTEMA LINEAR PELO MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS	22/05/2020	Felipe Santana Pena	Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl	Iniciação Científica Voluntária / Trabalho de Conclusão de Curso	Engenharia Civil	-
SISTEMAS LINEARES PELA FATORAÇÃO QR	22/05/2020	Felipe Santana Pena	Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl	Iniciação Científica Voluntária / Trabalho de Conclusão de Curso	Engenharia Civil	-
SISTEMAS LINEARES PELO MÉTODO SOR	22/05/2020	Felipe Santana Pena	Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl	Iniciação Científica Voluntária / Trabalho de Conclusão de Curso	Engenharia Civil	-
Área: Construção Civil -- TOPO						
Título e link	Data	Autor	Orientador	Tipo	Curso	Documentação
MODELO VIRTUAL DE CONSTRUÇÃO DE CASA POPULAR	05/08/2014	José Herbert Trindade	Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl	Trabalho de Conclusão de Curso	Técnico em Edificações	Publicações relacionadas
(...)						

Fonte: Núcleo de Engenharia Virtual (2015)

4.2.1 Interface de usuários dos programas

As interfaces de usuários dos três programas desenvolvidos neste trabalho serão descritas nas seções a seguir.

4.2.1.1 FATORAÇÃO QR

Acessando o link “SISTEMAS LINEARES – FATORAÇÃO QR” o usuário será redirecionado para a página mostrada na Figura 42.

Figura 42 - Interface do programa Fatoração QR.

SISTEMA LINEAR - FATORAÇÃO QR

Abaixo segue um exemplo de como o sistema linear deverá ser montado na matriz

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x \quad \quad - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{Equivale a} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 7 & 3 \\ 9 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & -8 & 5 & -4 \end{array}$$

Obs: Este método é mais indicado para resolver sistemas em que os termos independentes tenham vários conjuntos de valores para a mesma matriz de coeficientes.

Ordem do sistema (n):

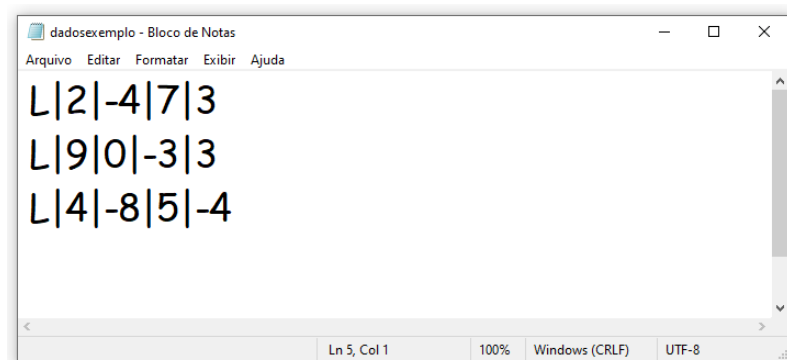
OU Nenhum arquivo selecionado *****

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Observa-se, na Figura 42, que a página mostra uma observação sobre a situação em que o método é mais indicado.

A interface apresenta um exemplo de como a matriz aumentada deve ser montada e, além disso, apresenta a possibilidade de utilizar exemplos em TXT. Para mais informações, basta clicar no botão “Exemplo de TXT” que se abre um arquivo TXT com um exemplo de uma matriz aumentada, ilustrada pela Figura 43.

Figura 43- Exemplo de matrix escrita em TXT.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Ao clicar em “gerar”, imprime-se a matriz aumentada, inicialmente com todos os elementos zerados. A Figura 44 mostra um exemplo preenchido pelo usuário.

Figura 44 - Exemplo numérico para a FATORAÇÃO QR.

SISTEMA LINEAR - FATORAÇÃO QR

Abaixo segue um exemplo de como o sistema linear deverá ser montado na matriz

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x \quad \quad - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{Equivale a} \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 & 3 \\ 9 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & -8 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Ordem do sistema (n):

OU Nenhum arquivo selecionado *****

8	2	2
2	3	4

Obs: Matriz COMPLETA (a última coluna contém os termos independentes, os valores após a igualdade).

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Ao clicar em “calcular”, imprimem-se os valores de x. Por ser um método direto, não há impressão de valores referentes a cada iteração e erro relativo, conforme a Figura 45.

Figura 45 - Solução do exemplo numérico para a FATORAÇÃO QR.

SISTEMA LINEAR - FATORAÇÃO QR

Abaixo segue um exemplo de como o sistema linear deverá ser montado na matriz

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x \quad \quad - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{Equivale a} \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 & 3 \\ 9 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & -8 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Ordem do sistema (n):

OU Nenhum arquivo selecionado *****

8	2	2
2	3	4

Obs: Matriz COMPLETA (a última coluna contém os termos independentes, os valores após a igualdade).

x1 = -0.10000000000000005
x2 = 1.4000000000000001

Elaborado pelo autor (2021).

Além disso, abaixo dos resultados, apresenta-se o botão “GERAR RELATÓRIO”, que abre o documento mostrado no Apêndice A.

Para verificar os resultados do programa, foi utilizado o programa de resolução de sistemas lineares pelo Método de Gauss disponível no Núcleo de Engenharia Virtual (2015).

A Tabela 2, a seguir, contém os resultados do exemplo acima, encontrados pela Fatoração QR e pelo Método de Gauss. Como se tratam de métodos diretos, não foi necessário adotar número máximo de iterações e erro relativo alvo.

Tabela 2- Tabela do exemplo pela Fatoração QR e Eliminação de Gauss

Método	x1	x2
FATORAÇÃO QR	-0,100000	1,400000
GAUSS	-0,100000	1,400000

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Dessa forma, o resultado encontrado valida a programação implementada.

4.2.1.2 MÉTODO S.O.R.

Acessando o link “SISTEMA LINEAR – MÉTODO S.O.R” , aparece a página mostrada na Figura 46.

Figura 46 - Interface do programa MÉTODO S.O.R.

SISTEMA LINEAR - MÉTODO SOR

Abaixo segue um exemplo de como o sistema linear deverá ser montado na matriz

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x \quad \quad - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{Equivale a} \quad \begin{matrix} 2 & -4 & 7 & 3 \\ 9 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & -8 & 5 & -4 \end{matrix}$$

Obs: Este método é mais indicado para resolver sistemas grandes e esparsos (com muitas posições zeradas).

Ordem do sistema (n):

OU

 Nenhum arquivo selecionado

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Observa-se, na Figura 46, que a página mostra uma observação sobre a situação em que o método é mais indicado.

Da mesma forma que o método descrito na seção (4.1.1.1), a matriz aumentada pode ser montada ou pode-se usar exemplos em TXT. Para mais informações, basta clicar no botão “Exemplo de TXT”. Dessa forma, adota-se um sistema linear 3x3, representado na Figura 47.

Figura 47 - Exemplo numérico para o MÉTODO S.O.R.

SISTEMA LINEAR - MÉTODO SOR

Abaixo segue um exemplo de como o sistema linear deverá ser montado na matriz

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x \quad \quad - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{Equivala a} \quad \begin{array}{cccc} 2 & -4 & 7 & 3 \\ 9 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & -8 & 5 & -4 \end{array}$$

Ordem do sistema (n):

OU Exemplo Felipe.txt *****

Obs: Matriz COMPLETA (a última coluna contém os termos independentes, os valores após a igualdade).

2	-1	0	5
-1	2	-1	3
0	-1	2	4

Número máximo de iterações:

Erro relativo alvo (%):

Parâmetro de Relaxação : [Ajuda](#)

Solução inicial (chute):

0	0	0
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Nota-se que a interface de usuário solicita parâmetros adicionais, na comparação com o programa descrito na Figura 44: número máximo de iterações, erro relativo alvo e parâmetro de relaxação. É importante ressaltar que ao lado de “Parâmetro de Relaxação” tem-se o link “Ajuda”. Ao clicar neste link, faz-se o download de um PDF contendo a explicação teórica para possível cálculo do parâmetro de relaxação. Este arquivo é mostrado no apêndice B

Ao clicar em “calcular”, imprime-se uma tabela contendo os valores de x referentes a cada iteração e, além disso, o erro relativo, conforme ilustrado pela Figura 48.

Figura 48 - Solução do exemplo numérico da Figura 46

ITERAÇÃO	x1	x2	x3	ERRO REL. (%)
1	2.9299999999999997	3.4749799999999995	4.380338279999999	100
2	4.4623782799999999	6.342135344159999	5.307073127517759	45.20804411404038
3	5.87896224751776	7.2221694505752945	5.663374720104068	24.09581670839741
4	6.151009791464067	7.439016178279975	5.729163028614165	4.422811102070353
5	6.231289796340246	7.4873145727591295	5.7461502987152135	1.2883368852998727
6	6.245784494666327	7.497455682407015	5.749171178511494	0.23207170113633216
7	6.2492340968079025	7.49950311396316	5.749851382078434	0.055200398771068214

Gerar Relatório

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Abaixo dos resultados, o programa apresenta o botão “GERAR RELATÓRIO”, que abre o documento mostrado no Apêndice C.

Para verificar os resultados do programa, foram utilizados dois programas de resolução de sistemas lineares. O primeiro programa é pelo Método de Jacobi e o segundo pelo Método de Gauss. Os dois programas estão disponíveis no Núcleo de Engenharia Virtual (2015). A tabela 3 apresenta os resultados comparativos.

O número máximo de iterações utilizado nos dois métodos foi 50, o erro relativo alvo de 10^{-3} , parâmetro de relaxação ω igual a 1,172 e solução inicial $x_{(0)} = (0,0,0)$

Tabela 3- Tabela do exemplo pelo Método S.O.R, JACOBI e Eliminação de GAUSS.

Método	Número de iterações	x1	x2	x3	Erro relativo (%)
S.O.R	7	6,2492304096	7,4995031139	5,7498513820	0,055
JACOBI	10	6,2453613281	7,4953613281	5,7476806640	0,074
GAUSS	-	6,25	7,50	5,7499999999	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Dessa forma, o resultado encontrado pelo Método S.O.R valida a programação implementada.

Além disso, Wandresen (1980) afirma que, para $\omega=1$, o método S.O.R se torna idêntico ao Método de Gauss-Seidel. Dessa forma, foi resolvido o mesmo sistema,

pelo Método S.O.R, utilizando $\omega=1$, e também pelo Método de Gauss-Seidel, disponível no Núcleo de Engenharia Virtual (2015). A tabela 4 apresenta os resultados comparativos entre o S.O.R e Gauss- Seidel. Ambos os métodos foram alimentados com a mesma solução correspondente a Tabela 3.

Tabela 4- Tabela do exemplo pelo Método S.O.R com $\omega=1$ e GAUSS-SEIDEL

Método	Número de iterações	x1	x2	x3	Erro relativo (%)
S.O.R	11	6,2453613281	7,4953613281	5,7476806640	0,074
GAUSS-SEIDEL	11	6,2453613281	7,4953613281	5,7476806640	0,074

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

4.2.1.3 MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

Acessando o link “SISTEMAS LINEARES – MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS”, o usuário será redirecionado para a página mostrada na Figura 49.

Figura 49 - Interface do programa MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS.

SISTEMA LINEAR - MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

Abaixo segue um exemplo de como o sistema linear deverá ser montado na matriz

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = -4 \end{cases}$$

Equivale a

2	-4	7	3
9	0	-3	3
4	-8	5	-4

Obs: Este método é mais indicado para resolver sistemas grandes e esparsos (com muitas posições zeradas).

Ordem do sistema (n):

OU
Nenhum arquivo selecionado

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Observa-se, na Figura 49, que a página mostra uma observação sobre a situação em que o método é mais indicado.

Para mostrar a interface do programa, adota-se um sistema 2x2 como exemplo, apresentado na Figura 50. É importante ressaltar que conforme descrito nas

seções (4.1.1.1) e (4.1.1.2), a matriz aumentada pode ser montada ou pode-se usar exemplos em TXT.

Figura 50 - Exemplo numérico para o MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS.

SISTEMA LINEAR - MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

Abaixo segue um exemplo de como o sistema linear deverá ser montado na matriz

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{Equivale a} \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 & \vdots & 3 \\ 9 & 0 & -3 & \vdots & 3 \\ 4 & -8 & 5 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

Ordem do sistema (n):

OU Exemplo Felipe.txt *****

Obs: Matriz COMPLETA (a última coluna contém os termos independentes, os valores após a igualdade).

8	2	2
2	3	4

Número máximo de iterações:

Erro relativo alvo (%):

Solução inicial (chute):

0	0
--------------------------------	--------------------------------

Elaborado pelo autor (2021).

Os dados iniciais do programa são: número máximo de iterações, erro relativo alvo e solução inicial do sistema. Ao clicar em calcular, de maneira análoga ao método S.O.R, imprime-se uma tabela contendo as soluções para cada iteração e os erros relativos, mostrados na Figura 51.

Figura 51 - Solução do exemplo numérico.

ITERAÇÃO	x1	x2	ERRO REL. 1	ERRO REL. 2	ERRO REL. 3
0	0	0	447.21359549995793	-	-
1	0.35714285714285715	0.7142857142857143	255.55062599997592	79.8595706249925	100
2	-0.09999999999999998	1.4	0	82.41260058203403	58.716546733018106

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Abaixo dos resultados, o programa apresenta o botão “GERAR RELATÓRIO”, que abre o documento mostrado no Apêndice D.

De maneira análoga ao método S.O.R, exemplificado na seção 4.1.1.2, para verificar os resultados do programa, foram utilizados os programas de resolução de sistemas lineares pelo Método de Jacobi e pelo Método de Gauss. Os dois programas estão disponíveis no Núcleo de Engenharia Virtual (2015).

A tabela 5, a seguir, contém os resultados do exemplo acima, encontrados pelo Método dos Gradientes Conjugados, Método de Jacobi e pelo Método de Gauss. É importante ressaltar que os dois primeiros métodos são iterativos e foi utilizado um número máximo de iterações igual a 50 e erro relativo alvo de 10^{-3} . Já o Método de Gauss é direto, dessa forma não foi necessário adotar número máximo de iterações e erro relativo alvo.

Tabela 5 - Tabela do exemplo pelo Método dos Gradientes Conjugados, Jacobi e Eliminação de Gauss

Método	Número de iterações	x1	x2	Erro relativo (%)
GRADIENTES CONJUGADOS	2	-0,099999999	1,400000000	0
JACOBI	11	-0,099954989	1,399991426	0,0321646
GAUSS	-	-0,099999999	1,400000000	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Dessa forma, o resultado encontrado valida a programação realizada.

4.3 TESTES

A seguir, abordam-se dois exemplos de sistemas lineares que foram testados. É importante ressaltar que as resoluções destes exemplos de maneira integral encontram-se nos Apêndices A, C e D, localizados no fim deste trabalho.

4.3.1 Exemplo 1: Sistema 2x2.

O primeiro exemplo de teste trata-se de um Sistema Linear de ordem 2, denotado por S3, representado nas equações (109) e (110) a seguir.

$$\begin{aligned} \text{S3} \quad & \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (109) \\ (110) \end{aligned}$$

A tabela 6, a seguir, apresenta os resultados do exemplo acima, encontrados pela Fatoração QR, Método S.O.R, Método dos Gradientes Conjugados, Método de Jacobi, Método de Gauss e pela Fatoração LU, todos disponíveis no Núcleo de Engenharia Virtual (2015). Para os métodos iterativos foi utilizado a solução inicial $x_0 = (0,0)$ e, para o Método S.O.R, $\omega = 1$, erro relativo alvo de 0,1% e número máximo de iterações igual a 50.

Tabela 6 - Tabela comparativa do exemplo.

Método	x_1	x_2	Iterações
FATORAÇÃO QR	-0,100000000	1,400000000	-
MÉTODO S.O.R	-0,099999931	1,400000703	7
GRADIENTES CONJUGADOS	-0,099999999	1,400000000	2
JACOBI	-0,099992498	1,399998571	11
GAUSS	-0,099999999	1,400000000	-
FATORAÇÃO LU	-0,099999999	1,400000000	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Dessa forma, ao analisar a tabela 6, nota-se que as informatizações *online* desenvolvidas neste trabalho realizaram seus processos com maestria, ou seja, fornecem resultados quase idênticos aos dos outros programas.

4.3.2 Exemplo 2: Sistema 3x3.

O segundo teste trata-se de um Sistema Linear de ordem 3, denotado por S2, representado na equações (111), (112) e (113) a seguir.

$$\begin{aligned} \text{S2} \quad & \begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 5 \\ -1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 3 \\ 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (111) \\ (112) \\ (113) \end{aligned}$$

A tabela 7 a seguir ilustra os resultados encontrados pelos métodos mencionados na seção (3.1.3.1), para efeito de comparação e validação dos

programas desenvolvidos neste trabalho. Para os métodos iterativos foi utilizado a solução inicial $x_0 = (0,0)$ e, para o Método S.O.R, $\omega = 1$, erro relativo alvo de 0,1% e número máximo de iterações igual a 50.

Tabela 7 - Tabela comparativa do exemplo

Método	x_1	x_2	x_3	Iterações
FATORAÇÃO QR	6,250000000	7,500000000	5,750000000	-
MÉTODO S.O.R	6,249998492	7,499998756	5,749999487	11
GRADIENTES CONJUGADOS	6,250000000	7,499999999	5,750000000	3
JACOBI	6,249908447	7,499885559	5,749908447	19
GAUSS	6,250000000	7,500000000	5,749999999	-
FATORAÇÃO LU	6,250000000	7,500000000	5,749999999	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Sendo assim, conclui-se que as informatizações *online* desenvolvidas fornecem resultados quase idênticos aos dos outros programas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dessa forma, de acordo com a seção 2.3 deste trabalho, pode-se compreender diversas aplicações de sistemas de equações lineares em problemas de Engenharia Civil, bem como de outras áreas do conhecimento.

Além disso, as Tabelas 2, 3, 4, 5, 6 e 7, validam a algoritmização dos programas desenvolvidos, visto que os resultados demonstrados foram quase idênticos aos obtidos por outros métodos.

Os relatórios presentes nos Apêndices A, C e D validam as rotinas computacionais embutidas para sua emissão e, além disso, confirmam a possibilidade de utilização como estudo, visto que apresentam todo o memorial de cálculo, teoria e raciocínio utilizado.

A Figura 41 mostra que os módulos de programa on-line foram disponibilizados para auxiliar alunos, professores e profissionais no estudo dos métodos utilizados.

Sendo assim, os resultados aqui apresentados demonstram a possibilidade de utilizar os programas criados como ferramenta por qualquer pessoa interessada, já que o NEV fornece acesso gratuito.

Como sugestão de trabalhos futuros pode-se realizar testes com matrizes grandes e esparsas; estudar a convergência dos métodos descritos e a programação do cálculo automático do parâmetro de relaxação ω , descrito na seção 2.5.

REFERÊNCIAS

- ANDRETTA, Marina; TOLEDO, Franklina. **Resolução de sistemas de equações lineares: Método dos Gradientes Conjugados**. ICMC USP, 21 set. 2012. Disponível em: <https://sites.icmc.usp.br/andretta/ensino/aulas/sme0100-2-12/aula6-gradconj.pdf>. Acesso em: 15 maio 2021.
- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Algebra Linear**: Com Aplicações. 10^a. ed. [S. l.: s. n.], 2012. 768 p.
- ARAÚJO, Adérito Luís Martins. **Matemática Computacional** [S. l.: s. n.], [2017]. Notas de apoio às aulas de Matemática Computacional do Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores, no ano lectivo de 2017/2018. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~alma/publicat/coursenotes/MatematicaComputacional.pdf>. Acesso em: 17 maio. 2021.
- ASCENCIO, Ana Fernanda Gomes; VENERUCHI, Edilene Aparecida. **Fundamentos da Programação de Computadores**: Algoritmos, Pascal, C/C++ (Padrão ANSI) e Java, 3.ed São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Acesso em 17 maio 2021.
- BARROSO, Leônidas Conceição *et al.* **Cálculo Numérico**: (Com aplicações). 2^a. ed. [S. l.]: HARBRA, 1987. 369 p.
- CRUVINEL, Frederico Borges. **Tópicos de Álgebra Linear e Aplicações em Problemas de Economia e de Engenharia**. 2013. 35 p. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Goiás, [S. l.], 2013.
- DORINI, Fábio Antonio. **MÉTODO QR**: um fluxo de matrizes. Universidade Federal de Santa Catarina: [s,n.],2000.
- FARIAS, Diego Marcon; KONZEN, Pedro Henrique de Almeida; SOUZA, Rafael Rigão. **Álgebra Linear: Um livro colaborativo**. Porto Alegre: UFRGS, 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/livro.pdf>. Acesso em: 10 maio. 2021.
- FLATSCHART, Fábio. Introdução & Evolução. In: FLATSCHART, Fábio. **HTML5**: Embarque Imediato. 2. ed. São Paulo: Brasport, 2011. cap. 1, p. 16-29. Acesso em: 06 maio. 2021.
- FERREIRA, Jossana. **Matrizes e Sistemas de Equações Lineares**: Espaços Vetoriais. Universidade Federal do Rio Grande do Norte: [s. n.], 2011. 206 p.
- FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. Universidade de São Paulo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação: [s. n.], 2006. 494 p.
- HO, Don. **Notepad++**. Versão 8.1.2. Paris: Don Ho, 2021. Disponível em: <https://notepad-plus-plus.org/>. Acesso em: 21 maio 2021.

IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas**. Volume 4. São Paulo: Editora Atual, 2006.

LEMAY, Laura. **Aprenda a Criar Páginas Web com HTML e XHTML em 21 dias**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002. Acesso em: 13 maio. 2021.

LEME, Everaldo. **Programação de computadores**. [S. l.]: Pearson Education Brasil, 2015.

MAXIMA. 5.45.1. [S. l.], 14 out. 2021. Disponível em: <https://maxima.br.uptodown.com/windows>. Acesso em: 9 nov. 2021.

MATRIX calculator. [S. l.], 2013. Disponível em: <https://matrixcalc.org/pt/>. Acesso em: 10 nov. 2021.

NÚCLEO DE ENGENHARIA VIRTUAL. **Núcleo de Engenharia Virtual - NEV**. Votuporanga, 2015. Disponível em: <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/>. Acesso em: 05 jun. 2021.

PDFMAKE. [S. l.], 2020. Biblioteca JavaScript. Disponível em: <http://pdfmake.org/#/>. Acesso em: 19 maio. 2021.

RUGGIERO, M.A.G; LOPES, V.L.R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SANTOS, Silvia Maria Pereira Grandi dos. **Método iterativo para solução de sistemas lineares Gradientes e Gradientes Conjugados USP** - São Carlos/SP, 2008. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/silvia/AulaGradientesConjugados.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2020.

SEGURADO, Válquiria Santos (org.). **Projeto de Interface com o usuário**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. 195 p. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/124143/pdf/>. Acesso em: 06 maio. 2020.

SCHMIDT, Mateus. **O Método SOR** [S. l.: s. n.], [2012]. Aplicações do método de Sobre-Relaxação Sucessiva em sistemas de equações lineares. Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/685/2019/08/sor_4.pdf. Acesso em: 12 maio. 2021.

SYMBOLAB. [S. l.], 2021. Disponível em: <https://pt.symbolab.com/>. Acesso em: 10 nov. 2021.

VALIENTE, Elton da Silva Paiva. **Aplicações de sistemas lineares e determinante na engenharia civil**. 2015. 91 p. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, [S. l.], 2015.

VAZ, Suélen Escaramusa. **Resolução de Sistemas Lineares usando O SOFTWARE MÁXIMA**. Orientador: Fernando Colman Tura. 2011. 55 p. Monografia (Especialista em Tecnologia no Ensino de Matemática) - FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – UNIPAMPA CAMPUS ALEGRETE, [S. l.], 2011. Disponível em: <http://dspace.unipampa.edu.br/bitstream/rii/1808/1/Resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20sistemas%20lineares%20usando%20o%20software%20m%C3%A1xima.PDF>. Acesso em: 6 jun. 2021.

WANDRESEN, Romualdo. **MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NORMAIS**. 1980. 227 p. Dissertação (Mestre em Ciências) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ, [S. l.], 1980. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/32997/D%20-%20ROMUALDO%20WANDRESEN.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 7 maio 2021.

W3SCHOOLS. [S. l.], 1998. Disponível em: <https://www.w3schools.com/>. Acesso em: 6 abr. 2021.

APÊNDICE A – EXEMPLO DO PROGRAMA FATORAÇÃO QR.

Seja o exemplo das Figuras 44 e 45 como dados de entrada e o resultado final para o programa “SISTEMA LINEAR – FATORAÇÃO QR”. O relatório está representado na Figura 52.

Figura 52- Relatório referente ao exemplo numérico pela FATORAÇÃO QR.



**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
SÃO PAULO
Campus Voluparanga

NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
 Título: Sistemas Lineares pelo Método QR
 Data: 09/09/2021
 Autor: Felipe Santana Pena
 Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
 Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional / Trabalho de conclusão de curso
 Curso: Engenharia Civil

A matriz segue o modelo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Ordem da Matriz =2

Matriz Completa:

8.000	2.000	2.000
2.000	3.000	4.000

Determinante = 20

De acordo com Farias, Konzen e Souza (2020, p.89), a premissa da FATORAÇÃO QR é transformar o sistema $Ax=b$ em um novo, onde pode-se escrever a matriz A na forma $A=QR$, sendo R uma matriz superior invertível (sua diagonal principal deve conter apenas termos não-nulos) e Q uma matriz ortonormal (que tem, entre outras, as características de que sua inversa é igual à sua transposta e seu determinante tem valor unitário, em módulo).

Sistema genérico $Ax=b$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matriz Q:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix}$$

Os termos da matriz Q são obtidos por meio da divisão dos termos da matriz Z (será explicada abaixo), por sua norma euclidiana (que também será explicada abaixo). Sendo assim temos que:

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{z}_1}{\|\vec{z}_1\|}, \vec{q}_2 = \frac{\vec{z}_2}{\|\vec{z}_2\|}, \dots, \vec{q}_n = \frac{\vec{z}_n}{\|\vec{z}_n\|}$$

q_1 refere-se ao vetor da primeira coluna da matriz Q , q_2 ao vetor da segunda coluna da matriz Q e assim sucessivamente até q_n .

Matriz Z:

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mn} \end{pmatrix}$$

Os termos da matriz Z são encontrados pela seguinte equação:

$$\vec{z}_j = \vec{a}_j - \frac{\langle \vec{a}_1, \vec{z}_1 \rangle}{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 \rangle} \vec{z}_1 - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_2 \rangle}{\langle \vec{z}_2, \vec{z}_2 \rangle} \vec{z}_2 - \cdots - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_{j-1} \rangle}{\langle \vec{z}_{j-1}, \vec{z}_{j-1} \rangle} \vec{z}_{j-1}$$

$\langle a_j, z_j \rangle$ é o produto interno entre o vetor a_j e o vetor z_j , definido por:

$$\langle \vec{a}_j, \vec{z}_j \rangle = (a_{1j} \cdot z_{1j} + a_{2j} \cdot z_{2j} + \cdots + a_{mj} \cdot z_{mj})$$

A norma euclidiana $\|\vec{z}_j\|$ é definida pela equação:

$$\|\vec{z}_j\| = \sqrt{(z_{1j})^2 + (z_{2j})^2 + \cdots + (z_{mj})^2}$$

Fatora-se $A=QR$. Logo, $R=AQ^{-1}$. Como uma matriz ortogonal é sempre invertível e sua inversa é dada pela sua transposta, temos:

$$R = A Q^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix}$$

Sendo assim, o sistema $Ax=b$ pode ser reescrito como $QRx=b$ ou até mesmo $Rx=Q^T b$. Dessa forma, deve-se resolver $Q^T b=y$ e, por fim, $Rx=y$.

Abaixo segue a resolução:

Determinação da matriz Z:

OBS: Chama-se aqui $zc[i]$ o vetor da coluna i de z .

$$zc[1]=a[1,1]=8$$

$$zc[1]=a[2,1]=2$$

$$\langle a[2], z[1] \rangle = 0$$

$$\langle a[2], zc[1] \rangle = \langle a[2], zc[1] \rangle + a[1,2] \cdot zc[1] = 0.0000 + 2 \cdot 8 = 16$$

$$\langle a[2], zc[1] \rangle = \langle a[2], zc[1] \rangle + a[2,2] \cdot zc[1] = 16.0000 + 3 \cdot 2 = 22$$

$$\langle zc[1], zc[1] \rangle = 0$$

$$\langle zc[1], zc[1] \rangle = \langle zc[1], zc[1] \rangle + zc[1] \cdot zc[1] = 0.0000 + 8 \cdot 8 = 64$$

$$\langle zc[1], zc[1] \rangle = \langle zc[1], zc[1] \rangle + zc[1] \cdot zc[1] = 64.0000 + 2 \cdot 2 = 68$$

$$\langle a[2], zc[1] \rangle / \langle zc[1], zc[1] \rangle = 22/68 = 0.3235294117647059$$

$$(\langle a[2], zc[1] \rangle / \langle zc[1], zc[1] \rangle) \cdot zc[1,1] = 0.3235294117647059 \cdot 8 = 2.588235294117647$$

$$(\langle a[2], zc[1] \rangle / \langle zc[1], zc[1] \rangle) \cdot zc[2,1] = 0.3235294117647059 \cdot 2 = 0.6470588235294118$$

$$zc[1,2] = a[1,2] - \langle a[2], zc[1] \rangle / \langle zc[1], zc[1] \rangle \cdot zc[1,1] = 2 - 2.588235294117647 = -0.5882352941176472$$

$$zc[2,2] = a[2,2] - \langle a[2], zc[1] \rangle / \langle zc[1], zc[1] \rangle \cdot zc[2,1] = 3 - 0.6470588235294118 = 2.3529411764705883$$

Matriz Z:

8.000	-0.5882
2.000	2.353

Determinação da matriz Q:

$$z[1]^2=0$$

$$z[1]^2=z[1]^2+z[1,1]^2=0.0000+8^2=64$$

$$z[1]^2=z[1]^2+z[2,1]^2=64.0000+2^2=68$$

$$\|z[1]\|=(z[1]^2)^{(1/2)}=(68)^{(1/2)}=8.246211251235321$$

$$q[1,1]=z[1,1]/\|z[1]\|=8/8.246211251235321=0.9701425001453319$$

$$q[2,1]=z[2,1]/\|z[1]\|=2/8.246211251235321=0.24253562503633297$$

$$z[2]^2=0$$

$$z[2]^2=z[2]^2+z[1,2]^2=0.0000+(-0.5882352941176472)^2=0.3460207612456749$$

$$z[2]^2=z[2]^2+z[2,2]^2=0.3460+2.3529411764705883^2=5.882352941176471$$

$$\|z[2]\|=(z[2]^2)^{(1/2)}=(5.882352941176471)^{(1/2)}=2.42535625036333$$

$$q[1,2]=z[1,2]/\|z[2]\|=-0.5882352941176472/2.42535625036333=-0.242535625036333$$

$$q[2,2]=z[2,2]/\|z[2]\|=2.3529411764705883/2.42535625036333=0.9701425001453319$$

$$q \text{ transposta}[1,1]=q[1,1]=0.9701425001453319$$

$$q \text{ transposta}[1,2]=q[2,1]=0.24253562503633297$$

$$q \text{ transposta}[2,1]=q[1,2]=-0.242535625036333$$

$$q \text{ transposta}[2,2]=q[2,2]=0.9701425001453319$$

Matriz Q:

3.298	-0.2425
0.8246	0.9701

Matriz Q transposta:

3.298	0.8246
-0.2425	0.9701

Determinação da matriz R:

$$r[1,1]=0$$

$$r[1,1]=r[1,1]+(q \text{ transposta}[1,1]*a[1,1])=0.0000+0.9701425001453319*8=7.761140001162655$$

$$r[1,1]=r[1,1]+(q \text{ transposta}[1,2]*a[2,1])=7.7611+0.24253562503633297*2=8.246211251235321$$

$$r[1,2]=0$$

$$r[1,2]=r[1,2]+(q \text{ transposta}[1,1]*a[1,2])=0.0000+0.9701425001453319*2=1.9402850002906638$$

$$r[1,2]=r[1,2]+(q \text{ transposta}[1,2]*a[2,2])=1.9403+0.24253562503633297*3=2.6678918753996625$$

$$r[2,1]=0$$

$$r[2,1]=r[2,1]+(q \text{ transposta}[2,1]*a[1,1])=0.0000+(-0.242535625036333)*8=-1.940285000290664$$

$$r[2,1]=r[2,1]+(q \text{ transposta}[2,2]*a[2,1])=-1.9403+0.9701425001453319*2=-2.220446049250313e-16$$

$$r[2,2]=0$$

$$r[2,2]=r[2,2]+(q \text{ transposta}[2,1]*a[1,2])=0.0000+(-0.242535625036333)*2=-0.485071250072666$$

$$r[2,2]=r[2,2]+(q \text{ transposta}[2,2]*a[2,2])=-0.4851+0.9701425001453319*3=2.4253562503633295$$

Matriz R:

8.246	2.668
-2.220e-16	2.425

Determinação de $y=QT*b$:

$$y[1,1]=0.0000+(q \text{ transposta}[1,1]*b[1,1])=0.0000+0.9701425001453319*2=1.9402850002906638$$

$$y[1,1]=1.9403+(q \text{ transposta}[1,2]*b[2,1])=1.9403+0.24253562503633297*4=2.9104275004359956$$

$$y[2,1]=0.0000+(q \text{ transposta}[2,1]*b[1,1])=0.0000+0.242535625036333*2=-0.485071250072666$$

$$y[2,1]=-0.4851+(q \text{ transposta}[2,2]*b[2,1])=-0.4851+0.9701425001453319*4=3.3954987505086613$$

Determinação da solução x , fazendo $Rx=y$. Como R é uma matriz triangular superior, tem-se:
 $x[2]=y[2]/r[2,2]=3.3954987505086613/2.4253562503633295=1.4000000000000001$

soma=0

$$\text{soma}=\text{soma}+a[1,2]*x[2]=0.0000+(2.6679*1.4000)=3.7350$$

$$x[1]=(y[1]-(\text{soma}))/a[1,1]=(2.9104-(3.7350))/8.2462=-0.1000000000$$

Solução:

-0.10000000000000005
1.4000000000000001

A seguir apresenta-se o algoritmo principal para a resolução de sistema linear pela Fatoração QR:

Sistemas Lineares pela Fatoração QR

Entrada: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

Saída: $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

1 $\vec{z}_j = \vec{a}_j$

2 enquanto $j > 1$ faça

3 $\vec{z}_j = \vec{a}_j - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_1 \rangle}{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 \rangle} \cdot \vec{z}_1 - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_2 \rangle}{\langle \vec{z}_2, \vec{z}_2 \rangle} \cdot \vec{z}_2 - \dots - \frac{\langle \vec{a}_j, \vec{z}_{j-1} \rangle}{\langle \vec{z}_{j-1}, \vec{z}_{j-1} \rangle} \cdot \vec{z}_{j-1}$

4 fim

5 $\vec{q}_j = \frac{\vec{z}_j}{\|\vec{z}_j\|}$;

6 $R = Q^T \cdot A$;

7 $Q^T \cdot b = y$;

8 $R \cdot x = y$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FARIAS, Diego Marcon; KONZEN, Pedro Henrique de Almeida; SOUZA, Rafael Rigão. Álgebra Linear: Um livro colaborativo. Porto Alegre: UFRGS, 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/livro.pdf>. Acesso em: 10 maio 2021.

APÊNDICE B – PDF DE AJUDA SOBRE O PARÂMETRO DE RELAXAÇÃO.

O PDF de “Ajuda” está representado na Figura 53.

Figura 53 - PDF "Ajuda"

1. Escolha do parâmetro de relaxação ômega.

Wandresen (1980) acrescenta que, para facilitar a escolha de valores para ω deve-se levar em consideração dois teoremas: o teorema de Kahan, que afirma que, se $a_{ii} \neq 0$ para todo valor de i , o método converge apenas para $0 < \omega < 2$, e o teorema desenvolvido por Ostrowski (1954), citado por Wandresen (1980), que define que, para um sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes A é positiva definida, há certeza de convergência do método para o intervalo $0 < \omega < 2$, qualquer que seja a aproximação inicial de x . Além disso, Wandresen (1980) conclui que, para $\omega = 1$, o método se torna idêntico ao Método de Gauss-Seidel.

Assim, a princípio, como parâmetro de relaxação, pode-se escolher qualquer valor diferente de 0.

Schmidt (2012) declara que, se a matriz dos coeficientes A for simétrica positiva definida e tridiagonal a opção ótima para ω é dada pela equação (1).

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [p(T_j)]^2}} \quad (1)$$

Franco (2006) afirma que uma matriz real simétrica A , $n \times n$, é positiva definida se todos os seus menores principais líderes (determinantes das submatrizes de A , constituídas retirando as k últimas linhas e k últimas colunas, para $k = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$), são positivos. Para maior compreensão, segue-se a verificação sobre se a matriz da equação (2) é positiva definida ou não.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 12 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Os menores principais líderes de F , para $k=2$, $k=1$ e $k=0$, respectivamente.

$$1, \det \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 12 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Como $\det \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} < 0$, a matriz F não é positiva definida.

Para encontrar $p(T_j)$, deve-se encontrar o $\det(T_j - \lambda I) = 0$, sendo a matriz λI definida pela equação (4), para um exemplo de ordem 3.

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4)$$

O mesmo autor define T_j .

$$T_j = D^{-1}(L + U) \quad (5)$$

Para compreender as matrizes D , L e U , devemos revisar os conceitos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Para o sistema linear $Ax = b$, Wandresen (1980) define as matrizes D , L e U , pelas equações (6), (7) e (8), respectivamente.

$$D = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j; \\ a_{ij}, \text{ se } i = j; \end{cases} \quad (6)$$

$$L = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, \text{ se } i < j; \\ a_{ij}, \text{ se } i > j; \end{cases} \quad (7)$$

$$U = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, \text{ se } i > j; \\ a_{ij}, \text{ se } i < j; \end{cases} \quad (8)$$

Segue um exemplo numérico, encontrado na bibliografia de Schmidt (2012), com matriz A simétrica positiva tridiagonal. Seja um sistema linear descrito pela equação (9).

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 51 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Para determinar o parâmetro ω deve-se, primeiramente, calcular T_j . Para o exemplo acima, define-se as matrizes D , L e U .

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Sendo assim,

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (11)$$

Efetua-se $L + U$ e multiplica-se o resultado por D^{-1} .

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Para encontrar $p(T_j)$, o primeiro passo é calcular $T_j - \lambda I$, conforme equação (13).

$$T_j - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & -\lambda & \frac{-1}{9} \\ 0 & \frac{-1}{9} & -\lambda \end{pmatrix} \quad (13)$$

Sendo assim, calcula-se o determinante e iguala-se a zero.

$$-\lambda^3 + \frac{17\lambda^2}{81} = 0 \quad (14)$$

Segundo Schmidt (2021), efetua-se as operações por evidência.

$$\lambda = \frac{\sqrt{17}}{9} \quad (15)$$

Por fim, aplica $p(T_j) = \frac{\sqrt{17}}{9}$ na equação (1) para encontrar o parâmetro de relaxação ω .

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{17}}{9}\right]^2}} = 1,058823529$$

Referências

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. Universidade de São Paulo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação: [s. n.], 2006. 494 p.

SCHMIDT, Mateus. **O Método SOR** [S. l.: s. n.], [2012]. Aplicações do método de Sobre-Relaxação Sucessiva em sistemas de equações lineares. Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/685/2019/08/sor_4.pdf. Acesso em: 12 maio. 202

WANDRESEN, Romualdo. **MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NORMAIS**. 1980. 227 p. Dissertação (Mestre em Ciências) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ, [S. l.], 1980. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/32997/D%20-%20ROMUALDO%20WANDRESEN.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 7 maio 2021.

APÊNDICE C – EXEMPLO DO PROGRAMA MÉTODO S.O.R.

Seja o exemplo da Figuras 46 e 47 como dados de entrada e o resultado final para o programa “SISTEMA LINEAR – MÉTODO S.O.R”, o relatório está representado na Figura 54 a seguir.

Figura 54 - Relatório PDF referente ao exemplo numérico pelo MÉTODO S.O.R



**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
SÃO PAULO
Campus Voluparanga

NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Sistemas Lineares pelo Método SOR
Data: 12/12/2021
Autor: Felipe Santana Pena
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional/ Trabalho de Conclusão de Curso
Curso: Engenharia Civil

A matriz segue o modelo abaixo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Ordem da Matriz =3

Matriz Completa:

2.000	-1.000	0.000	5.000
-1.000	2.000	-1.000	3.000
0.000	-1.000	2.000	4.000

O número máximo de iterações é: nit=50

O erro relativo alvo é: Era=0.1

O parâmetro de relaxação (omega) é: 1.172

A solução inicial, $x(0,1)$, $x(0,2)$,..., $x(0,n)$ (iteração 0), é:

0.000	0.000	0.000
-------	-------	-------

Determinante = 4

Segundo Wandresen (1980), O MÉTODO SOR (SUCCESSIVE-OVER-RELAXATION) trata-se do método de Gauss-Seidel "extrapolado", acelerado por meio do fator de relaxação ω . Quando há escolha correta de ω , o número de iterações é menor em comparação ao Gauss-Seidel. Schmidt (2012) afirma que, o MÉTODO S.O.R apresenta a seguinte fórmula de recorrência, partindo de valores iniciais para x:

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right]$$

Onde:

i é o índice referente à solução x , igual a 1 até ordem do sistema;

k é o índice referente à iteração;

$a[i,j]$ é o valor de cada célula da matriz A ;

$b[i,j]$ é o valor de cada célula do vetor b ;

j é um contador;

n é a ordem do sistema;

ω é o parâmetro de relaxação;

Para simplificar o entendimento deste programa, chamamos partes da fórmula de recorrência de somatório 1 e somatório 2, conforme imagem a seguir:

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)}}_{\text{somatório 1}} - \underbrace{\sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)}}_{\text{somatório 2}} \right]$$

Deve-se realizar os cálculos das k iterações até o critério de parada estipulado, ou seja, até que se encontre um erro relativo (Er) menor do que o Erro Relativo alvo (Era).

Para o caso de a solução demorar para convergir ou não convergir, considera-se um número máximo de iterações (nit).

Abaixo segue a resolução:

$Er[0]=100$

$k=1$

somatório 1=0

somatório2=somatório 2 + $a[1,2]*x2[0]=0.0000+(-1.0000*0.0000)=0.0000$

somatório2=somatório 2 + $a[1,3]*x3[0]=0.0000+(0.0000*0.0000)=0.0000$

$x1[1]=((1-\omega)*x1[0]) + ((\omega/a[1,1])*(b[1] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(0.0000)) + ((1.172/2.0000) * (b[1] - 0.0000 - 0.0000)) = 2.9300$

somatório 1=0

somatório1=somatório 1 + $a[2,1]*x1[0]=0.0000+(-1.0000*2.9300)=-2.9300$

somatório2=somatório 2 + $a[2,3]*x3[0]=0.0000+(-1.0000*0.0000)=0.0000$

$x2[1]=((1-\omega)*x2[0]) + ((\omega/a[2,2])*(b[2] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(0.0000)) + ((1.172/2.0000) * (b[2] - -2.9300 - 0.0000)) = 3.4750$

somatório 1=0

somatório1=somatório 1 + $a[3,1]*x1[0]=0.0000+(0.0000*2.9300)=0.0000$

somatório1=somatório 1 + $a[3,2]*x2[0]=0.0000+(-1.0000*3.4750)=-3.4750$

$x3[1]=((1-\omega)*x3[0]) + ((\omega/a[3,3])*(b[3] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(0.0000)) + ((1.172/2.0000) * (b[3] - -3.4750 - 0.0000)) = 4.3803$

Erro relativo: $Er[1]=|x1[1]-x1[0]|/|x1[1]|*100=(|2.9300-(0.0000)|/|2.9300|)*100=100.0000000000\%$

```

k=2
somatório 1=0
somatório2=somatório 2 +a[1,2]*x2[1]=0.0000+(-1.0000*3.4750)=-3.4750
somatório2=somatório 2 +a[1,3]*x3[1]=-3.4750+(0.0000*4.3803)=-3.4750
x1[2]=((1-omega)*x1[1]) + ((omega/a[1,1])*(b[1] - somatório 1 - somatório 2))= ((1-1.172)*(2.9300)) +
((1.172/2.0000) * (b[1] - 0.0000 - -3.4750) = 4.4624

somatório 1=0
somatório1=somatório 1 +a[2,1]*x1[1]=0.0000+(-1.0000*4.4624)=-4.4624

somatório2=somatório 2 +a[2,3]*x3[1]=0.0000+(-1.0000*4.3803)=-4.3803
x2[2]=((1-omega)*x2[1]) + ((omega/a[2,2])*(b[2] - somatório 1 - somatório 2))= ((1-1.172)*(3.4750)) +
((1.172/2.0000) * (b[2] - -4.4624 - -4.3803) = 6.3421

somatório 1=0
somatório1=somatório 1 +a[3,1]*x1[1]=0.0000+(0.0000*4.4624)=0.0000
somatório1=somatório 1 +a[3,2]*x2[1]=0.0000+(-1.0000*6.3421)=-6.3421
x3[2]=((1-omega)*x3[1]) + ((omega/a[3,3])*(b[3] - somatório 1 - somatório 2))= ((1-1.172)*(4.3803)) +
((1.172/2.0000) * (b[3] - -6.3421 - 0.0000) = 5.3071

Erro relativo:Er[2]=|x2[2]-x2[1]|/|x2[2]*100=(|6.3421-(3.4750)|/|6.3421|)*100=45.2080441140%

k=3
somatório 1=0
somatório2=somatório 2 +a[1,2]*x2[2]=0.0000+(-1.0000*6.3421)=-6.3421
somatório2=somatório 2 +a[1,3]*x3[2]=-6.3421+(0.0000*5.3071)=-6.3421
x1[3]=((1-omega)*x1[2]) + ((omega/a[1,1])*(b[1] - somatório 1 - somatório 2))= ((1-1.172)*(4.4624)) +
((1.172/2.0000) * (b[1] - 0.0000 - -6.3421) = 5.8790

somatório 1=0
somatório1=somatório 1 +a[2,1]*x1[2]=0.0000+(-1.0000*5.8790)=-5.8790
somatório2=somatório 2 +a[2,3]*x3[2]=0.0000+(-1.0000*5.3071)=-5.3071
x2[3]=((1-omega)*x2[2]) + ((omega/a[2,2])*(b[2] - somatório 1 - somatório 2))= ((1-1.172)*(6.3421)) +
((1.172/2.0000) * (b[2] - -5.8790 - -5.3071) = 7.2222

somatório 1=0
somatório1=somatório 1 +a[3,1]*x1[2]=0.0000+(0.0000*5.8790)=0.0000
somatório1=somatório 1 +a[3,2]*x2[2]=0.0000+(-1.0000*7.2222)=-7.2222
x3[3]=((1-omega)*x3[2]) + ((omega/a[3,3])*(b[3] - somatório 1 - somatório 2))= ((1-1.172)*(5.3071)) +
((1.172/2.0000) * (b[3] - -7.2222 - 0.0000) = 5.6634

Erro relativo:Er[3]=|x1[3]-x1[2]|/|x1[3]*100=(|5.8790-(4.4624)|/|5.8790|)*100=24.0958167084%

k=4
somatório 1=0
somatório2=somatório 2 +a[1,2]*x2[3]=0.0000+(-1.0000*7.2222)=-7.2222
somatório2=somatório 2 +a[1,3]*x3[3]=-7.2222+(0.0000*5.6634)=-7.2222
x1[4]=((1-omega)*x1[3]) + ((omega/a[1,1])*(b[1] - somatório 1 - somatório 2))= ((1-1.172)*(5.8790)) +
((1.172/2.0000) * (b[1] - 0.0000 - -7.2222) = 6.1510

somatório 1=0
somatório1=somatório 1 +a[2,1]*x1[3]=0.0000+(-1.0000*6.1510)=-6.1510
somatório2=somatório 2 +a[2,3]*x3[3]=0.0000+(-1.0000*5.6634)=-5.6634
x2[4]=((1-omega)*x2[3]) + ((omega/a[2,2])*(b[2] - somatório 1 - somatório 2))= ((1-1.172)*(7.2222)) +
((1.172/2.0000) * (b[2] - -6.1510 - -5.6634) = 7.4390

```

somatório 1=0
 somatório1=somatório 1 +a[3,1]*x1[3]=0.0000+(0.0000*6.1510)=0.0000
 somatório1=somatório 1 +a[3,2]*x2[3]=0.0000+(-1.0000*7.4390)=-7.4390
 $x3[4]=((1-\omega)*x3[3]) + ((\omega/a[3,3])*(b[3] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(5.6634)) + ((1.172/2.0000) * (b[3] - -7.4390 - 0.0000) = 5.7292$

k=5
 somatório 1=0
 somatório2=somatório 2 +a[1,2]*x2[4]=0.0000+(-1.0000*7.4390)=-7.4390
 somatório2=somatório 2 +a[1,3]*x3[4]=-7.4390+(0.0000*5.7292)=-7.4390
 $x1[5]=((1-\omega)*x1[4]) + ((\omega/a[1,1])*(b[1] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(6.1510)) + ((1.172/2.0000) * (b[1] - 0.0000 - -7.4390) = 6.2313$

somatório 1=0
 somatório1=somatório 1 +a[2,1]*x1[4]=0.0000+(-1.0000*6.2313)=-6.2313
 somatório2=somatório 2 +a[2,3]*x3[4]=0.0000+(-1.0000*5.7292)=-5.7292
 $x2[5]=((1-\omega)*x2[4]) + ((\omega/a[2,2])*(b[2] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(7.4390)) + ((1.172/2.0000) * (b[2] - -6.2313 - -5.7292) = 7.4873$

somatório 1=0
 somatório1=somatório 1 +a[3,1]*x1[4]=0.0000+(0.0000*6.2313)=0.0000
 somatório1=somatório 1 +a[3,2]*x2[4]=0.0000+(-1.0000*7.4873)=-7.4873
 $x3[5]=((1-\omega)*x3[4]) + ((\omega/a[3,3])*(b[3] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(5.7292)) + ((1.172/2.0000) * (b[3] - -7.4873 - 0.0000) = 5.7462$

Erro relativo:Er[5]=|x1[5]-x1[4]|/|x1[5]*100=(|6.2313-(6.1510)|/|6.2313|)*100=1.2883368853%

k=6
 somatório 1=0
 somatório2=somatório 2 +a[1,2]*x2[5]=0.0000+(-1.0000*7.4873)=-7.4873
 somatório2=somatório 2 +a[1,3]*x3[5]=-7.4873+(0.0000*5.7462)=-7.4873
 $x1[6]=((1-\omega)*x1[5]) + ((\omega/a[1,1])*(b[1] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(6.2313)) + ((1.172/2.0000) * (b[1] - 0.0000 - -7.4873) = 6.2458$

somatório 1=0
 somatório1=somatório 1 +a[2,1]*x1[5]=0.0000+(-1.0000*6.2458)=-6.2458
 somatório2=somatório 2 +a[2,3]*x3[5]=0.0000+(-1.0000*5.7462)=-5.7462
 $x2[6]=((1-\omega)*x2[5]) + ((\omega/a[2,2])*(b[2] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(7.4873)) + ((1.172/2.0000) * (b[2] - -6.2458 - -5.7462) = 7.4975$

somatório 1=0
 somatório1=somatório 1 +a[3,1]*x1[5]=0.0000+(0.0000*6.2458)=0.0000
 somatório1=somatório 1 +a[3,2]*x2[5]=0.0000+(-1.0000*7.4975)=-7.4975
 $x3[6]=((1-\omega)*x3[5]) + ((\omega/a[3,3])*(b[3] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(5.7462)) + ((1.172/2.0000) * (b[3] - -7.4975 - 0.0000) = 5.7492$

Erro relativo:Er[6]=|x1[6]-x1[5]|/|x1[6]*100=(|6.2458-(6.2313)|/|6.2458|)*100=0.2320717011%

k=7
 somatório 1=0
 somatório2=somatório 2 +a[1,2]*x2[6]=0.0000+(-1.0000*7.4975)=-7.4975
 somatório2=somatório 2 +a[1,3]*x3[6]=-7.4975+(0.0000*5.7492)=-7.4975
 $x1[7]=((1-\omega)*x1[6]) + ((\omega/a[1,1])*(b[1] - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1-1.172)*(6.2458)) + ((1.172/2.0000) * (b[1] - 0.0000 - -7.4975) = 6.2492$

somatório 1=0
 somatório1=somatório 1 +a[2,1]*x1[6]=0.0000+(-1.0000*6.2492)=-6.2492

$\text{somatório2} = \text{somatório 2} + a_{2,3} \cdot x_3[6] = 0.0000 + (-1.0000 \cdot 5.7492) = -5.7492$
 $x_2[7] = ((1 - \omega) \cdot x_2[6]) + ((\omega / a_{2,2}) \cdot (b_2 - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1 - 1.172) \cdot (7.4975)) + ((1.172 / 2.0000) \cdot (b_2 - -6.2492 - -5.7492)) = 7.4995$

somatório 1=0

$\text{somatório1} = \text{somatório 1} + a_{3,1} \cdot x_1[6] = 0.0000 + (0.0000 \cdot 6.2492) = 0.0000$

$\text{somatório1} = \text{somatório 1} + a_{3,2} \cdot x_2[6] = 0.0000 + (-1.0000 \cdot 7.4995) = -7.4995$

$x_3[7] = ((1 - \omega) \cdot x_3[6]) + ((\omega / a_{3,3}) \cdot (b_3 - \text{somatório 1} - \text{somatório 2})) = ((1 - 1.172) \cdot (5.7492)) + ((1.172 / 2.0000) \cdot (b_3 - -7.4995 - 0.0000)) = 5.7499$

Erro relativo: $Er[7] = |x_1[7] - x_1[6]| / |x_1[7]| \cdot 100 = (6.2492 - 6.2458) / 6.2492 \cdot 100 = 0.0552003988\%$

Em resumo:

ITERAÇÃO	x1	x2	x3	ERRO(%)
1	2.930	3.475	4.380	100.0
2	4.462	6.342	5.307	45.21
3	5.879	7.222	5.663	24.10
4	6.151	7.439	5.729	4.423
5	6.231	7.487	5.746	1.288
6	6.246	7.497	5.749	0.2321
7	6.249	7.500	5.750	0.05520

A seguir apresenta-se o algoritmo principal para a resolução de sistema linear pelo método SOR:

Sistemas lineares pelo Método S.O.R

Entrada: Valores de $x^{(0)}$, A , b , n , ω , Er e $\omega_{\max}$.

Saída: Valor de $x^{(k)}$, k e $Er^{(k)}$.

```

1 início
2   k ← 1;
3   x(k-1) ← x(0);
4   enquanto k < n e Er(k) > Er faça
5     x(k) ← (1 - ω) x(k-1) + (ω / aii) (bi - ∑j=1, j≠ik-1 aij xj(k-1));
6     k ← k + 1
7   fim
8 fim
  
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SCHMIDT, Mateus. O Método SOR. Santa Maria/RS: UFSM, 2012. Disponível em < w3.ufsm.br / labtmc / download=55:sor>. Acesso em 03/05/2020.

WANDRESEN, Romualdo. MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NORMAIS. 1980. 214 p. Pós-Graduação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, [S. l.], 1980.

APÊNDICE D – EXEMPLO DO PROGRAMA MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

Seja o exemplo das Figuras 49 e 40 como dados de entrada e o resultado final para o programa “SISTEMA LINEAR – GRADIENTES CONJUGADOS”, o relatório está representado na Figura 55 a seguir:

Figura 55- Relatório PDF referente ao exemplo numérico pelo MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS



**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
SÃO PAULO
Campus Voluporanga

NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
 Título: Sistemas Lineares pelo Método dos Gradientes Conjugados
 Data: 12/12/2021
 Autor: Felipe Santana Pena
 Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
 Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional/Trabalho e Conclusão de Curso
 Curso: Engenharia Civil

A matriz segue o modelo abaixo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Ordem da Matriz =2

Matriz Completa:

8.00000000	2.00000000	2.00000000
2.00000000	3.00000000	4.00000000

O número máximo de iterações é: nit= 50

O erro relativo alvo é: Era= 0.1

A solução inicial, $x(0,1)$, $x(0,2)$,..., $x(0,n)$ (iteração 0), é:

0.00000000	0.00000000
------------	------------

Determinante = 20

De acordo com Andretta e Toledo (2012), o MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS trata-se de um método de relaxação iterativo, ou seja, tem-se soluções que não são necessariamente exatas (resumindo: $Ax=b$ é diferente de zero). Essa perturbação entre o vetor b e o vetor Ax recebe o nome de resíduo, dado por:

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

Dessa forma, para a primeira iteração, cria-se uma sequência de valores de x que convergem para a solução do sistemas $Ax=b$, definida por:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_{(k-1)} r^{(k-1)}$$

Onde:

- k é o índice referente à iteração
- α é o parâmetro utilizado para regular o tamanho dos passos (explicado a seguir)
- r é o resíduo

Segundo Santos (2008), α é definido por:

$$\alpha = \frac{(r^{(0)})^T r^{(0)}}{(r^{(0)})^T A r^{(0)}}$$

Andretta e Toledo (2012) completam que a escolha de n direções linearmente independentes,

$(d_0, d_1, \dots, d_n)$, definidas pela equação abaixo é o grande diferencial do método.

$$d^{(k)} = r^{(k-1)} + \beta_{(k-1)} d^{(k-1)}$$

Sendo β definido por:

$$\beta_{(k-1)} = \frac{r^{(k-1)T} r^{(k-1)}}{r^{(k-2)T} r^{(k-2)}}$$

Para calcular os próximos valores de x , temos:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \gamma_{(k)} d^{(k)}$$

Onde:

k é o índice referente à iteração

γ é o parâmetro utilizado para regular o tamanho dos passos (explicado a seguir)

d é a direção de minimização do resíduo

Por fim, γ é definido por:

$$\gamma_{(k)} = \frac{r^{(k-1)T} r^{(k-1)}}{d^{(k)T} A d^{(k)}}$$

Além disso, no algoritmo presente neste trabalho, utilizamos o conceito de norma vetorial, para calcular os erros de cada iteração. A norma vetorial, para um vetor v qualquer de n linhas, é definida por:

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

Abaixo segue a resolução:

$$Er[0]=100$$

$$k=1$$

$$r[0,1]=a[1,1]*x1[0]-b[1]=8.0000*0.0000-2.0000=-2.0000$$

$$r[0,2]=a[2,1]*x2[0]-b[2]=2.0000*0.0000-4.0000=-4.0000$$

$$r[0]^2=0$$

$$r[0]^2=r[0]^2+r[0,1]^2=0.0000+2^2=4$$

$$r[0]^2=r[0]^2+r[0,2]^2=4.0000+4^2=20$$

$$\|r[0]\|=(r[0]^2)^{(1/2)}=(20)^{(1/2)}=4.47213595499958$$

$$d[1,1]=-r[0,1]=2.0000$$

$$d[1,2]=-r[0,2]=4.0000$$

$$\alpha=(r[0]^T r[0])/(A^T r[0]^T r[0])=20.0000/112.0000=0.1786$$

```

x[1,1]=x[0,1]+a*d[0,1]=0.0000+0.35714285714285715=0.3571
x[1,2]=x[0,2]+a*d[0,2]=0.0000+0.7142857142857143=0.7143

(x[1]-x[0])^2=0
(x[1]-x[0])^2=(x[1]-(x[0])^2+(x[1,1]-x[0,1])^2=0.0000+0.35714285714285715^2=0.12755102040816327
(x[1]-x[0])^2=(x[1]-(x[0])^2+(x[1,2]-x[0,2])^2=0.1276+0.7142857142857143^2=0.6377551020408163
||x[1]-x[0]||=(x[1]-x[0])^2^(1/2)=(0.6377551020408163)^(1/2)=0.7985957062499249

x[1]^2=0
x[1]^2=x[1]^2+x[1,1]^2=0.0000+0.35714285714285715^2=0.12755102040816327
x[1]^2=x[1]^2+x[1,2]^2=0.1276+0.7142857142857143^2=0.6377551020408163
||x[1]||=(x[1]^2)^(1/2)=(0.6377551020408163)^(1/2)=0.7985957062499249

||x[1]-x[0]||*100=0.7985957062499249*100=79.8595706249925%
||x[1]-x[0]||/||x[1]||*100=(0.7985957062499249/0.7985957062499249)*100=100.0000%

r[1,1]=r[0,1]+a*a[1,1]*d[1,1]=-2+0.1786*24=2.2857142857142856
r[1,2]=r[0,2]+a*a[2,1]*d[1,2]=-4+0.1786*16=-1.1428571428571428

k=2

r[1]^2=0
r[1]^2=r[1]^2+r[1,1]^2=0.0000+2.2857142857142856^2=5.224489795918367
r[1]^2=r[1]^2+r[1,2]^2=5.2245+-1.1428571428571428^2=6.530612244897958

||r[1]||=(r[1]^2)^(1/2)=(6.530612244897958)^(1/2)=2.5555062599997593
||r[1]||*100=(6.530612244897958)^(1/2)=2.5555062599997593*100=255.5506260000%

β=(r[1]T*r[1])/r[0]T*r[0]=6.5306/20.0000=0.3265

d[2,1]=-r[1,1]+β*d[1,1]=-(2.2857142857142856)+0.32653061224489793*2=-1.6326530612244898
d[2,2]=-r[1,2]+β*d[1,2]=-(1.1428571428571428)+0.32653061224489793*4=2.4489795918367347

γ=(r[1]T*r[2])/(A*d[2]T*d[2])=6.5306/23.3236=0.2800

x[2,1]=x[1,1]+γ*d[2,1]=0.35714285714285715+0.2800*-1.6326530612244898=-0.1000
x[2,2]=x[1,2]+γ*d[2,2]=0.7142857142857143+0.2800*2.4489795918367347=1.4000

(x[2]-x[1])^2=0
(x[2]-x[1])^2=(x[2]-(x[1])^2+(x[2,1]-x[1,1])^2=0.0000+-0.45714285714285713^2=0.20897959183673467
(x[2]-x[1])^2=(x[2]-(x[1])^2+(x[2,2]-x[1,2])^2=0.2090+0.6857142857142856^2=0.6791836734693876
||x[2]-x[1]||=(x[2]-x[1])^2^(1/2)=(0.6791836734693876)^(1/2)=0.8241260058203403

x[2]^2=0
x[2]^2=x[2]^2+x[2,1]^2=0.0000+-0.09999999999999998^2=0.009999999999999995
x[2]^2=x[2]^2+x[2,2]^2=0.0100+1.4^2=1.9699999999999998
||x[2]||=(x[2]^2)^(1/2)=(1.9699999999999998)^(1/2)=1.40356688476182

||x[2]-x[1]||*100=0.8241260058203403*100=82.41260058203403%
||x[2]-x[1]||/||x[2]||*100=(0.8241260058203403/1.40356688476182)*100=58.7165%

r[2,1]=r[1,1]+γ*A*d[2,1]=2.2857142857142856+0.2800*8.16326530612245=0.00000000
r[2,2]=r[1,2]+γ*A*d[2,2]=-1.1428571428571428+0.2800*4.081632653061225=0.00000000

r[2]^2=0
r[2]^2=r[2]^2+r[2,1]^2=0.0000+0^2=0
r[2]^2=r[2]^2+r[2,2]^2=0.0000+0^2=0

||r[2]||=(r[2]^2)^(1/2)=(0)^(1/2)=0
||r[2]||*100=(0)^(1/2)=0*100=0.0000000000%

```

ITERAÇÃO	x1	x2	ERRO RELATIVO 1(%)	ERRO RELATIVO 2(%)	ERRO RELATIVO 3(%)
1	0.3571	0.7143	255.5506	79.8596	100.0000
2	-0.1000	1.400	0.0000	82.4126	58.7165

A seguir apresenta o algoritmo principal para a resolução de sistema linear pelo método dos Gradientes Conjugados:

Algoritmo Gradientes Conjugados

Entrada: Valores de $x^{(0)}$, b , Era , nit e A .

Saída: $x^{(k)}$, k e $Er^{(k)}$.

```

1 início
2    $k = 1$ ;
3    $r^{(k-1)} = Ax^{(0)} - b$ ;
4   se  $Er^{(k)} = \|r^{(k)}\| < Era$  então
5     | devolva  $x^{(0)}$  como solução e pare
6   fim
7    $d^{(k)} = -r^{(k-1)}$ ;
8    $\alpha^{(k)} = \frac{r^{(k-1)T} r^{(k-1)}}{r^{(k-1)T} A r^{(k-1)}}$ ;
9    $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$ ;
10  se  $Er^{(k)} = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < Era$  ou  $\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} < Era$  então
11    | devolva  $x^{(k)}$  como solução e pare
12  fim
13   $r^{(k)} = r^{(k-1)} + \alpha^{(k)} A d^{(k)}$ ;
14   $k = 2$ ;
15  enquanto  $k < nit$  ou  $Er^{(k)} > Era$  faça
16    se  $\|r^{(k-1)}\| < Era$  então
17      | devolva  $x^{(k-1)}$  como solução e pare
18    fim
19     $\beta^{(k-1)} = \frac{r^{(k-1)T} r^{(k-1)}}{r^{(k-2)T} r^{(k-2)}}$ ;
20     $d^{(k)} = -r^{(k-1)} + \beta^{(k-1)} d^{(k-1)}$ ;
21     $\gamma^{(k)} = \frac{r^{(k-1)T} r^{(k-1)}}{d^{(k)T} A d^{(k)}}$ ;
22     $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \gamma^{(k)} d^{(k)}$ ;
23    se  $Er^{(k)} = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < Era$  ou  $\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} < Era$  então
24      | devolva  $x^{(k)}$  como solução e pare
25    fim
26     $r^{(k)} = r^{(k-1)} + \gamma^{(k)} A d^{(k)}$ ;
27     $k = k + 1$ 
28  fim
29  Escreva o método falhou para o número de iterações máximo
30 fim

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRETTA, Marina; TOLEDO, Franklina. Resolução de sistemas de equações lineares: Método dos Gradientes Conjugados. In: Resolução de sistemas de equações lineares: Método dos Gradientes Conjugados. ICMC/USP, 21 set. 2012. Disponível em: <https://sites.icmc.usp.br/andretta/ensino/aulas/sme0100-2-12/aula6-gradconj.pdf>. Acesso em: 21 maio 2020.

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. Cálculo Numérico. Universidade de São Paulo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação: [s. n.], 2006. 494 p.

SANTOS, Silvia Maria Pereira Grandi dos. Método iterativo para solução de sistemas lineares Gradientes e Gradientes Conjugados USP - São Carlos/SP, 2008. Disponível em: [https://](https://www.dm.ufscar.br/profs/silvia/AulaGradientesConjugados.pdf)

www.dm.ufscar.br/profs/silvia/AulaGradientesConjugados.pdf. Acesso em: 10 mar. 2020.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

APÊNDICE E – IMPLANTAÇÃO DOS ALGORITMOS PRINCIPAIS EM JAVASCRIPT

- MÉTODO QR:

```
function sistemaqr(n,b,a){
    vetor=[];
    for(i=1;i<=n;i++){
        vetor[i+',1']=a[i+',1']; //q1-a1
    }
    for(j=2;j<=n;j++){
        for(i=1;i<=n;i++){
            vetor[i+',j']=a[i+',j'];
        }
        for(jd=(j-1);jd>=1;jd--){
            somaqr=[];
            for(i=1;i<=n;i++){
                somaqr[i]=0;
            }
            vetora=[];
            for(i=1;i<=n;i++){
                vetora[i]=a[i+',j'];
            }
            vetorb=[];
            for(i=1;i<=n;i++){
                vetorb[i]=vetor[i+',jd'];
            }
            multveta(vetora,vetorb,n);
            cima=resmultveta;
            multvetb(vetorb,vetorb,n);
            baixo=resmultvetb;
            coef=cima/baixo;
            for(i=1;i<=n;i++){
                somaqr[i]=(cima/baixo)*vetorb[i];
            }
            for(i=1;i<=n;i++){
                vetor[i+',j']=vetor[i+',j']-somaqr[i];
            }
        }
    }
}
```

```
matrizQ=[]
for(j=1;j<=n;j++){
    somanorma=0
    for(i=1;i<=n;i++){
        somanorma1=somanorma.toFixed(4);
        somanorma=somanorma+Math.pow(vetor[i+','+j],2);
    }
    normaresult=Math.sqrt(somanorma);
    for(i=1;i<=n;i++){
        matrizQ[i+',j']=vetor[i+',j']/normaresult;
    }
}
matrizqtransp=[]
for(i=1;i<=n;i++){
    for(j=1;j<=n;j++){
        matrizqtransp[i+',j']=matrizQ[j+',i'];
    }
}
multiplicacaodematriz(matrizqtransp,n,n,a,n,n);
matrizR=[]
for(i=1;i<=n;i++){
    for(j=1;j<=n;j++){
        matrizR[i+',j']=resmult[i+',j'];
    }
}
bi=[]
for(i=1;i<=n;i++){
    for(j=1;j<=1;j++){
        bi[i+',j']=b[i];
    }
}
multiplicacaodematriz2(matrizqtransp,n,n,bi,n,1);
y=[]
for(i=1;i<=n;i++){
```

```

        for(j=1;j<=n;j++){
y[i+', '+j]=resmult2[i+', '+j];
}
}
yi=[]
for(i=1;i<=n;i++){

for(j=1;j<=1;j++){
yi[i]=y[i+', '+j];
}
}
sistemasuperior(n,yi,matrizR); }

```

- MÉTODO S.O.R:

```

function
sistemasor(n,b,a,nit,Era,x,omega){
Er=[]; //criar o vetor
Er[0]=100; //valor inicial de 100% para poder entrar
no while
k=1; //número da iteração
while(Er[k-1]>Era && k<=nit ){
kfix=Number(k).toFixed(0);
for(i=1;i<=n;i++){
somaa=0;
if(i>1){
for(j=1;j<=(i-1);j++){
somaa1=somaa.toFixed(4);
somaa=somaa+a[i+', '+j]*x['e'+k+', '+j];
afix=Number(a[i+', '+j]).toFixed(4);
xfix=Number(x['e'+k+', '+j]).toFixed(4);
}
}
somab=0;
if(i<n){
for(j=(i+1);j<=n;j++){
somab1=somab.toFixed(4);
somab=somab+a[i+', '+j]*x['e'+(k-1)+'+', '+j];
afix=Number(a[i+', '+j]).toFixed(4);
xfixb=Number(x['e'+(k-1)+'+', '+j]).toFixed(4);
}
}
if
(a[i+', '+i]==0) { //na diagonal

```

```

alert('Erro: Algum elemento da diagonal é nulo. ');
return; //pára o programa
}
x['e'+k+', '+i]=((1-omega)*x['e'+(k-1)+'+', '+i])+((omega/a[i+', '+i])*(b[i]-somaa-somab));
bfix=Number(b[i]).toFixed(4);
xfixx=Number(x['e'+(k-1)+'+', '+i]).toFixed(4);
afix1=Number(a[i+', '+i]).toFixed(4);
somab1=somab.toFixed(4);
soma1=soma1.toFixed(4);
}
Er[k]=(Math.abs(x['e'+k+', '1']-x['e'+(k-1)+'+', '1'])/Math.abs(x['e'+k+', '1']))*100;
xfix=Number(x['e'+k+', '1']).toFixed(4);
xfix1=Number(x['e'+(k-1)+'+', '1']).toFixed(4);
me=1;
for(c=2;c<=n;c++){ //para cada coluna ou solução, a
partir da 2
if(Math.abs((x['e'+k+', '+c]-x['e'+(k-1)+'+', '+c])/Math.abs(x['e'+k+', '+c]))*100>Er[k]) {
Er[k]=(Math.abs(x['e'+k+', '+c]-x['e'+(k-1)+'+', '+c])/Math.abs(x['e'+k+', '+c]))*100;
xfix=Number(x['e'+k+', '+c]).toFixed(4);
xfix1=Number(x['e'+(k-1)+'+', '+c]).toFixed(4);
me=c;
}
}
k=k+1;
if ((k-1)==nit) {
break; //sai do laço enquanto
}
}
}

```

- MÉTODO DOS GRADIENTES

CONJUGADOS:

```

function sistemagrad(n,b,a,nit,Era,xi){
inormaresult1=[];
inormaresult2=[];
inormaresult3=[];
k=1
kfix=Number(k).toFixed(0);
ximult=[];
for(i=1;i<=n;i++){ //linhas

```

```

for(j=1;j<=1;j++){ //colunas
ximult[i+', '+j]=xi['e0','+i'];
}
}
multiplicacaodematriz(a,n,n,ximult,n,1); //sai
resmult[], ordem n x 1
resduo=[] //cria vetor (r)
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
resduo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j']=resmult[i+', '+j]-b[i];
resduofixed=Number(resduo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j']).toFixed(4);
x0fix=Number(xi['e0','+i']).toFixed(4);
afix=Number(a[i+', '+j]).toFixed(4);
bfix=Number(b[i]).toFixed(4);
}
}
terminar=0; //não para o programa
resduonorma=[] //cria o vetor que vai entrar
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
resduonorma[i+', '+j]=resduo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j'];
}
}
normaeuclidiana(resduonorma) ;
inormaresult1[k-1]=normaresult*100;
inormaresult2[k-1]='-';
inormaresult3[k-1]='-';
normafix=Number(normaresult*100).toFixed(4);
if (normaresult*100<Era) {
    terminar=1;
    alert('x inicial é a resolução do sistema')
}
if(terminar==0){
distancia=[] //cria vetor É O P
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
distancia['e'+(k)+'+', '+i+', '+j']=-resduo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j'];
resduofixx=Number(-resduo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j']).toFixed(4);
}
}
resduot=[] //cria vetor (rt)

```

```

for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=n;j++){
resduot[i+', '+j]=resduo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j'];
}
}
resduotemp=[] //cria vetor
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
resduotemp[i+', '+j]=resduo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j'];
}
}
multiplicacaodematriz(resduot,1,n,resduotemp,n,1);
//sai resmult[i+', '+j], ordem n x 1
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
resduotm=resmult[i+', '+j]; //rOT*rO
}
}
multiplicacaodematriz(resduot,1,n,a,n,n); //sai
resmult[i+', '+j], ordem n x 1
resduota=[] //cria vetor
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=n;j++){
resduota[i+', '+j]=resmult[i+', '+j];
}
}
multiplicacaodematriz(resduota,1,n,resduotemp,n,1);
//sai resmult[i+', '+j], ordem n x 1
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
resduotam=resmult[i+', '+j]; //parte de baixo toda
}
}
beta=resduotm/resduotam; //é o q
resduotmfix=resduotm.toFixed(4);
resduotamfix=resduotam.toFixed(4);
betafix=beta.toFixed(4);
betadist=[] //cria vetor
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
betadist[i+', '+j]=beta*distancia['e'+(k)+'+', '+i+', '+j'];
//q1*p1
betadistfix=Number(betadist[i+', '+j]).toFixed(4);
}
}

```

```

}
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
//xi['e0','+i];
xi['e'+(k)+'+', '+i] = ((xi['e'+(k-1)+'+', '+i]+betadist[i+', '+j]));
xifix=Number(xi['e'+(k)+'+', '+i]).toFixed(4);
xifixx=Number(xi['e'+(k-1)+'+', '+i]).toFixed(4);
}
}
terminar=0;
xknorma=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
xknorma[i]=xi['e'+(k)+'+', '+i];
}
}
xkmenosnorma=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
xkmenosnorma[i]=xi['e'+(k-1)+'+', '+i];
}
}
inormaresult1[k]='-';
menosnormaeuclidiana(xknorma,xkmenosnorma)
inormaresult2[k]=normaresult2*100;
normaeuclidianax(xknorma);
inormaresult3[k]=(normaresult2/normaresult3)*100;
norma2fix=Number(normaresult2*100).toFixed(4);
norma3fix=Number((normaresult2/normaresult3)*100).toFixed(4);
terminar=0

if((normaresult2*100<Era)||((normaresult2/normaresult3)*100<Era) {
terminar=1
alert('x1 (passo 5) é a resolução do sistema');
k=k+1; //ok, tá no k=1 e devlve x1
}
if(terminar==0){
distanciakmult=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
distanciakmult[i+', '+j]=distancia['e'+(k)+'+', '+i+', '+j];
}
}

```

```

}
multiplicacaodematriz(a,n,n,distanciakmult,n,1);
//A*p1
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
residuo['e'+(k)+'+', '+i+', '+j]=residuo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j]+beta*resmult[i+', '+j];
residuokfixed=Number(residuo['e'+(k)+'+', '+i+', '+j]).toFixed(4);
}
}
k=2;
kfix=Number(k).toFixed(0);
while (k<=nit){
residuonorma2=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
residuonorma2[i+', '+j]=residuo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j];
}
}
normaeuclidiana(residuonorma2);
inormaresult1[k-1]=normaresult*100;
inormaresultfix=Number(inormaresult1[k-1]).toFixed(10);
if(normaresult*100<Era){
break; //sai do laço enquanto
}
residuokt=[] //cria vetor (rt)
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=n;j++){
residuokt[i+', '+j]=residuo['e'+(k-1)+'+', '+j+', '+i]
}
}
residuoktemp=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
residuoktemp[i+', '+j]=residuo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j];
}
}
multiplicacaodematriz(residuokt,1,n,residuoktemp,n,1); //sai resmult[i+', '+j], ordem n x 1
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
residuoktm=resmult[i+', '+j];
}
}

```

```

residuoktmfix=residuoktm.toFixed(4);
}
}
residuoktdois=[] //cria vetor (rt)
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=n;j++){
residuoktdois[i+', '+j]=residuo['e'+(k-2)+'+', '+j+', '+i]
}
}
residuokdoistemp=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
residuokdoistemp[i+', '+j]=residuo['e'+(k-2)+'+', '+i+', '+j];
}
}
multiplicacaodematriz(residuoktdois,1,n,residuokdoistemp,n,1)
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
residuoktn=resmult[i+', '+j];
residuoktnfix=residuoktn.toFixed(4);
}
}
alpha=residuoktm/residuoktn;
alphafix=alpha.toFixed(4);
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
distancia['e'+(k)+'+', '+i+', '+j]=-residuo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j]+alpha*distancia['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j]
}
}
residuokkt=[] //cria vetor (rt)
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=n;j++){
residuokkt[i+', '+j]=residuo['e'+(k-1)+'+', '+j+', '+i];
}
}
residuokktemp=[] //cria vetor
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
residuokktemp[i+', '+j]=residuo['e'+(k-1)+'+', '+i+', '+j];
}
}

```

```

multiplicacaodematriz(residuokkt,1,n,residuokktemp,
n,1); //sai resmult[i+', '+j], ordem n x 1
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
residuotmk=resmult[i+', '+j];
}
}
distanciakkt=[]
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=n;j++){
distanciakkt[i+', '+j]=distancia['e'+(k)+'+', '+j+', '+i];
}
}
multiplicacaodematriz(distanciakkt,1,n,a,n,n); //sai
resmult[i+', '+j], ordem n x 1
distanciakkta=[] //cria vetor
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=n;j++){
distanciakkta[i+', '+j]=resmult[i+', '+j];
}
}
distanciakkkt=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
distanciakkkt[i+', '+j]=distancia['e'+(k)+'+', '+i+', '+j];
}
}
multiplicacaodematriz(distanciakkta,1,n,distanciakkkt,n,1); //sai resmult[i+', '+j], ordem n x 1
for(i=1;i<=1;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
distanciafinal=resmult[i+', '+j];
}
}
distanciafinalfix=distanciafinal.toFixed(4);
residuotmkfix=residuotmk.toFixed(4);
beta=residuotmk/distanciafinal
betakfix=Number(beta).toFixed(4);
alphadist=[] //cria vetor
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
alphadist[i+', '+j]=beta*distancia['e'+(k)+'+', '+i+', '+j];
//q1*p1
}
}

```

```

}
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
xi['e'+(k)+'+', 'i'] = (xi['e'+(k-1)+'+', 'i']+alphadist[i+'+', 'j']);
xifixxx=Number(xi['e'+(k)+'+', 'i']).toFixed(4);
}
}
xknorma=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
xknorma[i]=xi['e'+(k)+'+', 'i'];
}
}
xkmenosnorma=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
xkmenosnorma[i]=xi['e'+(k-1)+'+', 'i'];
}
}
inormaresult1[k]='-'; //tem nos cálculos anteriores
menosnormaeuclidiana(xknorma,xkmenosnorma)
inormaresult2[k]=normaresult2*100;
normaeuclidianax(xknorma);
inormaresult3[k]=(normaresult2/normaresult3)*100;
norma2fix=Number(normaresult2*100).toFixed(4);
norma3fix=Number((normaresult2/normaresult3)*100).toFixed(4);
terminar=0
if((normaresult2*100<Era)||((normaresult2/normaresult3)*100<Era) {
    terminar=1
    alert('x é a solução no passo 13');
    k=k+1; //ok, devolve xk
}
if(terminar==0){
distanciafinalll=[]
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){
distanciafinalll[i+'+', 'j']=distancia['e'+(k)+'+', 'i+'+', 'j'];
}
}
}
multiplicacaodematriz(a,n,n,distanciafinalll,n,1);
for(i=1;i<=n;i++){
for(j=1;j<=1;j++){

```

```

teste=resmult[i+'+', 'j'];
teste2=resduo['e'+(k-1)+'+', 'i+'+', 'j']
resduo['e'+(k)+'+', 'i+'+', 'j']=teste2+beta*teste;
resduofinal=Number(resduo['e'+(k)+'+', 'i+'+', 'j']).toFixed(8);
}
}
}
k=k+1;
}
}
}
}

```