

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

ISABELA CASSIA DOMINICAL PARRA

PROGRAMA PARA ANÁLISE DE VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA

VOTUPORANGA

2018

Isabela Cassia Dominical Parra

PROGRAMA PARA ANÁLISE DE VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA

Trabalho para a Conclusão de Curso apresentado como exigência para obtenção do diploma do Curso de bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Campus Votuporanga.

Professor Orientador: M.e Gustavo Cabrelli Nirschl

Votuporanga

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

P259p Parra, Isabela Cassia Dominical, 1994-
Programa para análise de viga sobre base elástica / Isabela Cassia Dominical Parra – Votuporanga, 2018.
95 p. : il.; 29,8 cm.
Bibliografia: p. 94-95

Orientador: Gustavo Cabrelli Nirschl
Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, 2018.

1. Análise estrutural (Engenharia). 2. Análise elástica (Engenharia) – Programas de computador. 3. Vigas. 4. Relatórios técnicos. I. Título.

CDD – 624.177230285

Isabela Cassia Dominical Parra

PROGRAMA PARA ANÁLISE DE VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA

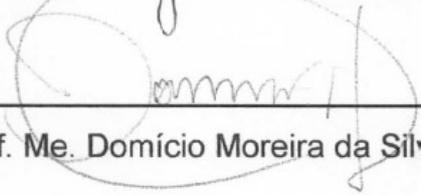
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência para obtenção do diploma do Curso de bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Campus Votuporanga.

Aprovada pela banca examinadora em 17 de outubro de 2018.

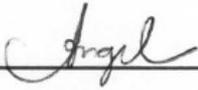
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Me. Gustavo Cabrelli Nirschi



Prof. Me. Domicio Moreira da Silva Júnior



Prof. Ma. Angélica Paiva Ramos

AGRADECIMENTOS

Primeiramente queria agradecer a Deus, que é base da minha vida, por ter me dado forças para superar as dificuldades e chegar até aqui.

Queria agradecer também toda minha família, minha mãe, por ser aquela companheira e minha amiga de todas as horas, meu pai por me mostrar o quanto a engenharia é maravilhosa, meus irmãos por entender os dias que estava sem paciência e discutia por tudo e ao meu namorado pela paciência e atenção quando dizia não ter tempo para nada somente para os estudos. A esses e aos demais familiares que sempre me incentivaram a estudar e seguir meu sonho.

Se hoje chego ao fim de mais uma etapa com maturidade e com um pouco de bagagem é por causa de um conselho que ouvi de um professor de matemática do ensino médio: "Faça cursinho, você irá amadurecer com o tempo, e valerá a pena no futuro". Essa frase faz todo sentido não me arrependo de ter feito a escolha de esperar a minha hora de estudar no IFSP - Campus Votuporanga.

Agradeço aos meus professores por todos ensinamentos. Vocês sempre serão uma inspiração para mim.

Um agradecimento especial ao meu orientador por toda dedicação, pela vontade de transmitir conhecimento, pela paciência, pelos puxões de orelha e pelos conselhos quando, muitas vezes, queria fazer as coisas pela metade.

Aos meus colegas de turma que sempre estiveram comigo nos trabalhos de sala, e nos estudos compartilhando conhecimento.

Aos companheiros do grupo de pesquisa NEVE, por sempre trocar informações e me ajudarem quando tinha dúvidas.

Obrigado a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para o meu crescimento como aluna de Engenharia Civil.

RESUMO

A maioria dos programas de computador, como por exemplo FTOOL (2017), voltados para a análise estrutural, na Engenharia Civil, mostram os diagramas finais de deslocamentos e esforços (normal, cortante e momento fletor), mas não indicam todos os cálculos envolvidos para se chegar até o resultado final. Isso dificulta, por parte dos discentes e até dos profissionais recém-formados, o estudo e a validação das teorias envolvidas. Com o objetivo de ampliar a divulgação da teoria de viga sobre base elástica e auxiliar esse público, foi criado um módulo adicional ao programa IFESTRUT, o qual realiza a análise estrutural de viga sobre base elástica. Como resultado, tem-se os diagramas de deslocamento, de momento fletor e de esforço cortante. Como diferencial, é possível gerar um relatório em PDF com detalhes para obter os resultados dos diagramas. O desenvolvimento do módulo foi feito na linguagem HTML/Javascript, para permitir a disponibilização on-line.

Palavras-Chave: Análise estrutural. Diagrama de deslocamento. Diagrama de esforço cortante. Diagrama de momento fletor. Viga sobre base elástica.

ABSTRACT

Most softwares, such as FTOOL, focused on structural analysis in Civil Engineering, show the final diagrams (displacements, axial force, shear force and bending moment), but do not indicate all the calculations involved to get to the end result. This makes it difficult for students and even newly trained professionals to study and validate the theories involved. With the objective of increasing the dissemination of beam theory on elastic basis and assisting this public, an additional module was created to the IFESTRUT software, which perform structural analysis of beam on elastic basis. As a result, it presents the displacement, bending moment and shear diagrams. As a differential, it's possible to generate a detailed PDF report to obtain the results of the diagrams. The development of the module was made in the HTML / Javascript language, to make it available online.

Keywords: Structural analysis. Displacement diagram. Shear diagram. Bending moment diagram. Beam under elastic base.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Viga sobre base elástica.....	13
Figura 2 - Viga sobre base elástica com carga pontual aplicada	22
Figura 3 - Viga sobre base elástica com momento concentrado.....	25
Figura 4 - Momento concentrado transformado em um binário.....	26
Figura 5 - Viga sobre base elástica com carga distribuída (trecho interno).....	27
Figura 6 - Viga sobre base elástica com carga distribuída (trecho externo).....	28
Figura 7 - Vigas semi-infinitas de bordo livre.....	29
Figura 8 - Vigas semi-infinitas de bordo apoiado	31
Figura 9 - Vigas semi-infinitas de bordo engastado	32
Figura 10 - Viga de comprimento finito com bordos livres.....	33
Figura 11 - Viga de comprimento finito com bordos apoiados	34
Figura 12 - Viga de comprimento finito com bordos engastados.....	34
Figura 13 - Viga de comprimento finito de bordo livre e apoiado	35
Figura 14 - Viga de comprimento finito de bordo apoiado e livre	35
Figura 15 - Viga de comprimento finito de bordo livre e engastado	36
Figura 16 - Viga de comprimento finito de bordo engastado e livre	36
Figura 17 - Viga de comprimento finito de bordo apoiado e engastado	37
Figura 18 - Viga de comprimento finito de bordo engastado e apoiado	37
Figura 19 - Interface do IFESTRUT.....	39
Figura 20 - Exemplo de tela com resultados	42
Figura 21 - Relatório PDF do exemplo 01 - Continua.....	44
Figura 22 - Diagrama de deslocamento do exemplo 01 obtidos no Ftool (2017).....	49
Figura 23 - Diagrama de momento fletor do exemplo 01 obtidos no Ftool (2017).....	49
Figura 24 - Diagrama de cortante do exemplo 01 obtidos no Ftool (2017)	49
Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 - Continua.....	50
Figura 26 - Diagrama de deslocamento do exemplo 02 obtidos no Ftool (2017).....	58
Figura 27 - Diagrama de momento fletor do exemplo 02 obtidos no Ftool (2017).....	58
Figura 28 - Diagrama de cortante do exemplo 02 obtidos no Ftool (2017)	58
Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua.....	59
Figura 30 - Diagrama de deslocamento do exemplo 03 obtidos no Ftool (2017).....	71
Figura 31 - Diagrama de momento fletor do exemplo 03 obtidos no Ftool (2017).....	71
Figura 32 - Diagrama de cortante do exemplo 03 obtidos no Ftool (2017)	71

Figura 33 - Viga semi-infinita com bordo apoiado à direita e carga pontual.....	72
Figura 34 - Características das barras do exemplo 04.....	72
Figura 35 - Diagrama de deslocamento do exemplo 04.....	73
Figura 36 - Diagrama de deslocamento do exemplo 04 obtidos no Ftool (2017).....	73
Figura 37 - Diagrama de momento fletor do exemplo 04 obtidos no Ftool (2017).....	73
Figura 38 - Diagrama de momento fletor do exemplo 04	74
Figura 39 - Diagrama de cortante do exemplo 04	74
Figura 40 - Diagrama de cortante do exemplo 04 obtidos no Ftool (2017)	75
Figura 41 - Viga semi-infinita com bordo engastado à direita	75
Figura 42 - Diagrama de deslocamento do exemplo 05.....	76
Figura 43 - Diagrama de deslocamento do exemplo 05 obtidos no Ftool (2017).....	76
Figura 44 - Diagrama de momento fletor do exemplo 05	76
Figura 45 - Diagrama de momento fletor do exemplo 05 obtidos no Ftool (2017).....	77
Figura 46 - Diagrama de cortante do exemplo 05	77
Figura 47 - Diagrama de cortante do exemplo 05 obtidos no Ftool (2017)	77
Figura 48 - Viga com uma carga pontual e um momento concentrado.....	78
Figura 49 - Classificação da viga do exemplo da Figura 48 apresentada pelo programa	78
Figura 50 - Considerações para classificação da viga para a carga pontual	79
Figura 51 - Considerações para classificação da viga para o momento aplicado.....	79
Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 - Continua	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de k_v (kN/m^3), dado por Terzaghi	18
Tabela 2 - Valores de k_v (kN/m^3), dado por Moraes	19
Tabela 3 - Relação entre tensão admissível e coeficiente de rigidez - Continua	20
Tabela 4 - Outros Exemplos analisados - Continua	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CAD	Computer Aided Design (Projeto Auxiliado por Computador)
HTML	HyperText Markup Language (Linguagem de Marcação de Hipertexto)
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
NA	Nível d'água
PDF	Portable Document Format (Formato Portátil de Documento)
SPT	Standard penetration test (ensaio de penetração padrão)

LISTA DE SÍMBOLOS

k	coeficiente de rigidez do solo
E	módulo de elasticidade longitudinal do material da viga
I	momento de inércia da seção transversal da viga
y	deslocamentos transversais da viga
x	posição no eixo horizontal na viga
k_v	coeficiente de rigidez do solo em unidade de força sobre volume
σ	tensão aplicada a placa
ρ	recalque
E_0	módulo edométrico do solo
F	área da superfície da fundação
s	tensão média admissível
A	área da seção transversal
β	parâmetro para verificar se a base (solo) é rígida ou elástica
L	comprimento da viga
P	carga pontual
M_c	momento aplicado
q	carga distribuída
M	momento fletor
Q	esforço cortante
y'	giro

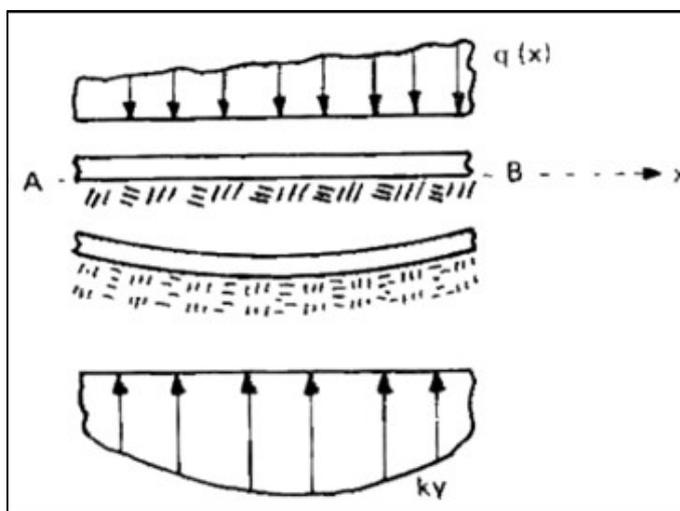
SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Objetivos	14
1.2 Justificativa	15
1.3 Metodologia	15
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1 Determinação do coeficiente de rigidez do solo (k)	17
2.1.1 <i>Ensaio de Placa</i>	17
2.1.2 <i>Uso de tabelas</i>	18
2.1.3 <i>Uso de fórmula</i>	19
2.1.4 <i>Correlação empírica</i>	20
2.2 Teoria de flexão de viga sobre base elástica	21
2.2.1 <i>Viga de comprimento infinito</i>	22
2.2.2 <i>Viga de comprimento semi-infinito</i>	29
2.2.3 <i>Viga de comprimento finito</i>	33
3 RESULTADOS	39
3.1 Base CAD	39
3.2 Módulo de viga sobre base elástica	41
3.3 Relatório PDF	42
3.4 Exemplos	43
3.4.1 <i>Exemplo 01 - Viga infinita com momento aplicado (Figuras 21 a 24)</i>	43
3.4.2 <i>Exemplo 02 - Viga semi-infinita com bordo livre à esquerda e carga pontual (Figuras 25 a 28)</i>	50
3.4.3 <i>Exemplo 03 - Viga finita com bordos apoiados e carga distribuída (Figura 29 a 32)</i>	59
3.4.4 <i>Exemplo 04 - Viga de comprimento semi-infinito com bordo apoiado à direita e carga pontual (Figura 33 a 40)</i>	72
3.4.5 <i>Exemplo 05 - Viga de comprimento semi-infinito com bordo engastado (Figuras 41 a 47)</i>	75
3.4.6 <i>Exemplo 06 - Viga com uma carga pontual e um momento concentrado (Figuras 48 a 52)</i>	78
3.4.7 <i>Outros exemplos</i>	91
4 CONCLUSÃO	93

1 INTRODUÇÃO

O comprimento enterrado das estacas, os dormentes onde se apoiam os trilhos de estrada de ferro e as vigas baldrame são estruturas que se apoiam no solo em todo seu comprimento. Essas estruturas, ao se apoiarem no solo, são consideradas estruturas de apoio elástico. Sussekind (1977) demonstra o estudo da flexão simples de vigas sobre base elástica, conforme a Figura 1:

Figura 1 - Viga sobre base elástica.



Fonte: Sussekind (1977).

Conforme Sussekind (1977), o método parte da equação diferencial ordinária das vigas sobre base elástica (Equação 1):

$$E * I * \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - k * y \quad (1)$$

Em que:

E : módulo de elasticidade longitudinal do material da viga

I : momento de inércia da seção transversal da viga

y : deslocamentos transversais da viga

x : posição no eixo horizontal na viga

q : carga distribuída

k : coeficiente de rigidez do solo

A partir da Equação 1, Sussekind (1977) desenvolve cálculos para deslocamentos, para esforço cortante e para momento fletor de vigas sobre base elástica. As vigas podem ser classificadas como: de comprimento infinito, de comprimento semi-infinito com bordo livre, apoiado ou engastado em qualquer uma das duas extremidades, ou ainda de comprimento finito com bordos livres, apoiados, engastados ou com combinações diferentes de dois tipos de vinculação. Essa classificação é feita de acordo com a influência que cada ação exerce nas extremidades da viga. As ações manifestam-se na forma de carga pontual, de momento concentrado ou de carga distribuída. As formulações para conseguir os resultados dos diagramas variam de acordo com a classificação e o carregamento da viga.

Os cálculos para o desenvolvimento numérico da teoria descrita, bem como a maioria dos cálculos de engenharia, são extensos. Sendo assim, recorre-se ao uso de programas de computador. No entanto, algumas vezes esses softwares podem não apresentar o resultado esperado, seja por erros de entrada de dados ou por considerações internas do programa que não condizem com a especificidade do projeto em questão. O Ftool (2017), por exemplo, programa voltado para a análise estrutural, mostra os diagramas finais de deslocamento e esforços, mas não detalha os cálculos envolvidos para se chegar às soluções finais. Outros programas chegam a apresentar resultados intermediários ao longo dos cálculos, mas nem sempre dão informações suficientes para se buscar as respostas esperadas. Isso dificulta, por parte dos discentes e até dos profissionais recém-formados, o estudo e a validação das teorias envolvidas.

Visando a contribuir com a exibição detalhada da resolução, foi criado um módulo no programa IFESTRUT, já disponibilizado on-line¹, que calcula os diagramas de deslocamento e esforços de vigas sobre base elástica, contendo um relatório explicativo com todo passo a passo até a solução final.

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é mostrar a teoria analítica da análise estrutural de viga sobre base elástica por meio de exemplos e explicações detalhadas. Neste

¹<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut/lfestrut.php?>

contexto, foi adicionado ao IFESTRUT, software já existente, um módulo para o cálculo de vigas sobre base elástica.

Como resultado, realizam-se todos os cálculos de deslocamentos, esforço cortante e momento fletor de diversas seções da viga e desenham-se os diagramas com os resultados. Como explicado anteriormente, detalham-se as explicações da teoria envolvida no método, ou seja, mostram-se os cálculos e a teoria para se chegar até eles. Isto foi feito por meio de um relatório em PDF com a intenção de que alunos, profissionais e professores possam utilizar como estudo e como elemento auxiliar na metodologia de ensino.

O método de cálculo é o proposto por Sussekind (1977), a partir da equação diferencial de vigas fletidas com inércia constante.

1.2 Justificativa

A análise estrutural é imprescindível para o sucesso do projeto, uma vez que é a partir dela que se estuda o comportamento da estrutura (deslocamentos e esforços) e se consegue dimensionar seus elementos. Em projetos de estruturas que se apoiam inteiramente no solo, é necessário levar em consideração a interação do solo com a viga, pois o solo nem sempre tem comportamento rígido e isso vem a influenciar a análise estrutural. Devido a essa relação, a equação diferencial para esse tipo de viga é diferente das demais. Aparece um termo que está associado à reação vertical que o solo exerce sob a viga, tornando os cálculos mais complexos de serem resolvidos e interpretados.

Segundo Loureiro (1992), o cálculo de diagramas de vigas sobre base elástica, “apesar de ter sido desenvolvido em finais do século XIX, ainda carece de maior divulgação entre os profissionais da engenharia que militam na área de Projeto de Fundações”. Portanto, buscando uma maior divulgação do assunto, criou-se um programa que, além de calcular, explica, detalhadamente, os passos realizados para chegar ao resultado, por meio do relatório PDF.

1.3 Metodologia

Por meio de uma revisão bibliográfica, é possível detalhar e exemplificar a teoria sobre o cálculo de deslocamentos e esforços em vigas sobre base elástica. São

consideradas vigas de comprimento infinito, comprimento semi-infinito e comprimento finito, com qualquer combinação de dois apoios. Para as ações, são consideradas carga pontual, momento concentrado ou carga distribuída, podendo haver combinações de mais de um tipo numa mesma viga.

É apresentado também a revisão bibliográfica de como determinar o k (coeficiente de rigidez do solo) na prática, parâmetro necessário dentro da teoria implementada pelo software.

O software IFESTRUT é uma base CAD, já existente, criada por Santos Junior, Lopes e Nirschl (2016), ou seja, é a partir dele que se desenha a viga, os contornos, as cargas e, no caso, para este módulo específico, é nele que se atribui o k , coeficiente de rigidez do solo. Somente depois de desenhada a viga é que se processam os cálculos por meio da escolha do módulo apresentado neste trabalho.

Para criação deste módulo, a edição do código é dividida em três etapas, para maior facilidade de montagem e pelo motivo de que cada etapa possui uma linguagem diferente e específica.

A primeira etapa foi a criação da interface do software, na qual foi utilizada a linguagem HTML estudada em W3schools (2018), dado que este é disponibilizado de forma on-line. Na sequência, para criar os cálculos, a linguagem matemática foi transcrita para a linguagem JavaScript. Por último, para a montagem do arquivo PDF, o código foi o disponibilizado na biblioteca Pdfmake (2018). Os códigos das três etapas foram desenvolvidos no Notepad++ (2016), programa gratuito.

Houve uma fase de teste, na qual foi utilizado o Google Chrome, navegador de internet, no modo offline. Esta fase serviu para corrigir erros. Foi testado o maior número de exemplos possíveis de viga sobre base elástica de acordo com a teoria apresentada, tentando sempre levar em consideração as possíveis interações entre os carregamentos e os diferentes vínculos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As estruturas apoiadas diretamente no solo são consideradas com apoio contínuo, sendo que o solo, por não ser totalmente rígido influencia na análise dos esforços. Esse apoio elástico exerce sob a viga, uma reação proporcional ao deslocamento vertical y sofrido por uma seção, igual a $k * y$ (hipótese de Winckler), sendo k o coeficiente de rigidez do solo. Será apresentado como se determina o coeficiente de rigidez do solo, na prática, e depois serão demonstradas as equações que envolvem esse parâmetro na determinação dos esforços de flexão de vigas.

2.1 Determinação do coeficiente de rigidez do solo (k)

O coeficiente de rigidez do solo k , também chamado de módulo de reação ou coeficiente elástico, tem uma parcela vertical e uma parcela horizontal. Neste trabalho somente será tratado do coeficiente vertical, uma vez que só serão consideradas ações verticais. Este fator é uma relação existente entre a interação solo-estrutura, que depende da tensão aplicada ao solo e do recalque relacionado.

Existem diversas maneiras para determinar o k , uma exata e outras mais empíricas apresentadas na sequência.

2.1.1 Ensaio de Placa

Segundo a NBR 6489 (1984), para a execução do ensaio de prova de carga, é preciso uma placa rígida de área não inferior a $0,5 \text{ m}^2$, que será colocada sobre o solo na profundidade a ser executada de tal forma que simule as condições futuras da fundação.

Para proceder com o ensaio, deve-se aplicar à placa um incremento inicial de carga de no máximo 20% da taxa admissível provável do solo e anotar o recalque, de tempo em tempo, até que o recalque se estabilize. A tolerância máxima para o recalque é 5% do recalque total naquele estágio. Depois de estabilizado, pode-se repetir o processo. O ensaio é finalizado quando se atingir um recalque máximo de 25 mm ou o dobro da taxa admitida para o solo. Se não atingir a ruptura, deve-se esperar 12 h com a carga máxima aplicada. A descarga da placa deve ser feita na mesma proporção que foi carregada.

Como resultado, será obtido uma curva tensão x recalque que, segundo Cintra, Aoki e Albiero (2003), pode ser ajustada a uma reta no seu trecho inicial, pois a inclinação no trecho é quase linear, sendo então o coeficiente de rigidez do solo calculado pela Equação 2 a seguir:

$$k_v = \frac{\sigma}{\rho} \quad (2)$$

Em que:

k_v : coeficiente de rigidez do solo em unidade de força sobre volume

σ : tensão aplicada a placa

ρ : recalque

2.1.2 Uso de tabelas

Em caso de não ter condições de fazer o ensaio de placa, existem tabelas que auxiliam na obtenção do coeficiente de rigidez do solo. Segue a Tabela 1 sugerida por Terzaghi (1955 apud ANTONIAZZI, 2011).

Tabela 1 - Valores de k_v (kN/m³), dado por Terzaghi

Argilas	Rija	Muito rija	Dura
q_u (MPa)	0,1 a 0,2	0,2 a 0,4	Maior que 0,4
Faixa de valores	16000 a 32000	32000 a 64000	Maior que 64000
Valor proposto	24000	48000	96000
Areia	Fofas	Mediamente compacta	Compactada
Faixa de valores	6000 a 19000	19000 a 96000	96000 a 320000
Areia acima NA	13000	42000	160000
Areia submersa	8000	26000	96000

Fonte: Terzaghi (1955 apud ANTONIAZZI, 2011, p. 36).

Em que:

q_u : resistência à compressão não-drenada, determinado pelo ensaio de placa.

NA: nível d'água

Outra sugestão é a Tabela 2 a seguir, sugerida por Moraes (1976 apud ANTONIAZZI, 2011).

Tabela 2 - Valores de k_v (kN/m^3), dado por Moraes

Tipo de solo	k_v
Turfa leve – solo pantanoso	5000 a 10000
Turfa pesada – solo pantanoso	10000 a 15000
Areia fina de praia	10000 a 15000
Aterro de silte, de areia e cascalho	10000 a 20000
Argila molhada	20000 a 30000
Argila úmida	40000 a 50000
Argila seca	60000 a 80000
Argila seca endurecida	100000
Silte compactado com areia e pedra	80000 a 100000
Silte compactado com areia e muita pedra	100000 a 120000
Cascalho miúdo com areia fina	80000 a 120000
Cascalho médio com areia fina	100000 a 120000
Cascalho grosso com areia grossa	120000 a 150000
Cascalho grosso com pouca areia	150000 a 200000
Cascalho grosso com pouca areia compactada	200000 a 250000

Fonte: Moraes (1976 apud ANTONIAZZI, 2011, p. 37).

2.1.3 Uso de fórmula

Além das tabelas, o projetista pode optar por determinar o coeficiente de rigidez do solo por meio da Equação 3 indicada em Rausch (1959 apud LONGO, 2018).

$$k_v = \frac{E_0}{f * \sqrt{F}} \quad (3)$$

Em que:

k_v : coeficiente de rigidez do solo em unidade de força sobre volume

E_0 : módulo edométrico do solo

F: área da base da fundação

f: coeficiente adimensional igual a 0,4.

O módulo edométrico, segundo Holanda (1998), é a razão entre a tensão aplicada e a deformação quando não são permitidas deformações laterais. Esse valor é obtido por meio do ensaio de compressão edométrico ou por meio de tabela que pode ser encontrada em Longo (2018).

2.1.4 Correlação empírica

Com o ensaio de SPT (Standard penetration test) também é possível conseguir relação com o coeficiente vertical de rigidez do solo, por meio de uma correlação empírica com a tensão média admissível. A tensão s , segundo Longo (2018), é obtida pela fórmula empírica da Equação 4.

$$S(\text{kgf/cm}^2) = 0,2 * SPT_{\text{médio}} \quad (4)$$

Encontrado o valor da tensão, consegue-se o k_v utilizando a Tabela 3 abaixo:

Tabela 3 - Relação entre tensão admissível e coeficiente de rigidez - Continua

Tensão admissível (kgf/cm ²)	k_v (kgf/cm ³)	Tensão admissível (kgf/cm ²)	k_v (kgf/cm ³)	Tensão admissível (kgf/cm ²)	k_v (kgf/cm ³)
0,25	0,65	1,55	3,19	2,85	5,70
0,30	0,78	1,60	3,28	2,90	5,80
0,35	0,91	1,65	3,37	2,95	5,90
0,40	1,04	1,70	3,46	3,00	6,00
0,45	1,17	1,75	3,55	3,05	6,10
0,50	1,30	1,80	3,64	3,10	6,20
0,55	1,39	1,85	3,73	3,15	6,30
0,60	1,48	1,90	3,82	3,20	6,40
0,65	1,57	1,95	3,91	3,25	6,50
0,70	1,66	2,00	4,00	3,30	6,60
0,75	1,75	2,05	4,10	3,35	6,70
0,80	1,84	2,10	4,20	3,40	6,80
0,85	1,93	2,15	4,30	3,45	6,90
0,90	2,02	2,20	4,40	3,50	7,00

Fonte: Safe, Morrison (1993 apud LONGO, 2018).

Tabela 3 - Relação entre tensão admissível e coeficiente de rigidez - Conclusão

Tensão admissível (kgf/cm ²)	k _v (kgf/cm ³)	Tensão admissível (kgf/cm ²)	k _v (kgf/cm ³)	Tensão admissível (kgf/cm ²)	k _v (kgf/cm ³)
0,95	2,11	2,25	4,50	3,55	7,10
1,00	2,20	2,30	4,60	3,60	7,20
1,05	2,29	2,35	4,70	3,65	7,30
1,10	2,38	2,40	4,80	3,70	7,40
1,15	2,47	2,45	4,90	3,75	7,50
1,20	2,56	2,50	5,00	3,80	7,60
1,25	2,65	2,55	5,10	3,85	7,70
1,30	2,74	2,60	5,20	3,90	7,80
1,35	2,83	2,65	5,30	3,95	7,90
1,40	2,92	2,70	5,40	4,00	8,00
1,45	3,01	2,75	5,50		
1,50	3,10	2,80	5,60		

Fonte: Safe, Morrison (1993 apud LONGO, 2018).

2.2 Teoria de flexão de viga sobre base elástica

Antes de passar a resolver o problema de flexão de viga sobre base elástica, há que se estudar quando esta teoria é aplicável. Para tanto, existe um parâmetro β , que depende do coeficiente de rigidez do solo (k) e da rigidez do material da viga ($E \cdot I$, E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia), que é o determinante para a viga ser ou não classificada como de base elástica. Este parâmetro é dado pela Equação 5, abaixo:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4 \cdot E \cdot I}} \quad (5)$$

Segundo Sussekind (1977), quando $\beta \cdot L < \pi/4$, sendo L é o comprimento da viga, a estrutura pode ser avaliada como infinitamente rígida, sem deformações e esforços por flexão, tendo a reação de apoio com o mesmo módulo, mas oposta ao carregamento. Nessas condições, não é válida a teoria de viga sobre base elástica.

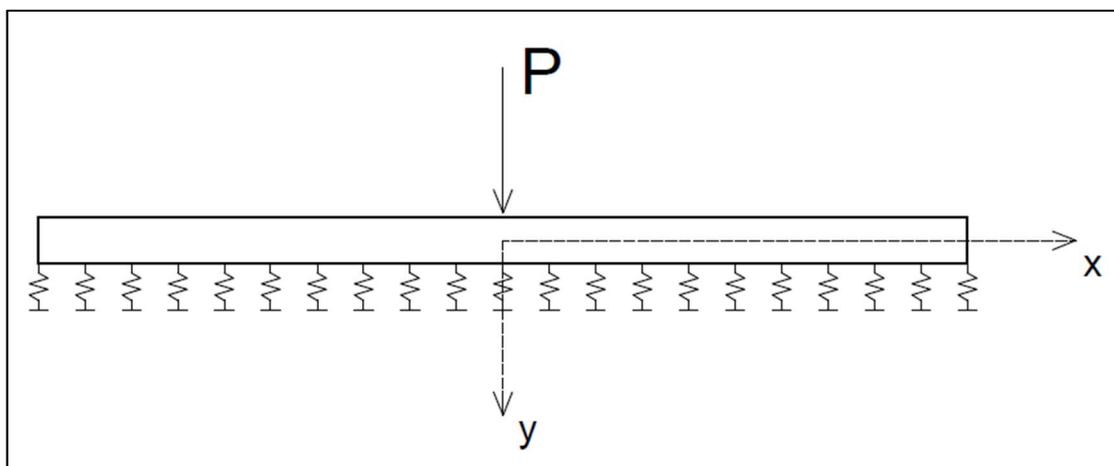
Dependendo da influência da carga nas extremidades da viga, classifica-se a mesma como infinita, semi-infinita ou finita, ou seja, se a carga está tão distante das duas extremidades que não possui mais influência lá, a viga é considerada como infinita. Se a carga está muito longe de uma das bordas e perto da outra, a viga é considerada semi-infinita. E, finalmente, se a carga está perto das duas extremidades, a viga é considerada finita.

Para todas as classificações da viga comentadas anteriormente, a solução da análise estrutural envolve a viga de comprimento infinito. Portanto, a seguir, resume-se a teoria para analisar uma viga de comprimento infinito, conforme Sussekind (1977).

2.2.1 Viga de comprimento infinito

Seja uma viga de comprimento infinito com a atuação de uma carga pontual, como a da Figura 2 a seguir:

Figura 2 - Viga sobre base elástica com carga pontual aplicada



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Observando a Figura 2, em que $q(x) = 0$, e substituindo na Equação 1, que é a equação diferencial ordinária que rege o problema, tem-se:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{k * y}{E * I} = 0 \quad (6)$$

Substituindo a Equação 5 na anterior, tem-se:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4 * \beta^4 * y = 0 \quad (7)$$

A solução geral para o caso da equação anterior é:

$$y(x) = e^{\beta * x}(A * \cos(\beta * x) + B * \sen(\beta * x)) + e^{-\beta * x}(C * \cos(\beta * x) + D * \sen(\beta * x)) \quad (8)$$

Como explicado anteriormente, em se tratando de viga de comprimento infinito, a força P não exercerá influência sobre as extremidades da viga e considerando a origem de x na carga, nos pontos muito distantes (x tendendo a +/- infinito), teremos deslocamentos tendendo a zero ($y(\infty) = 0$). Temos:

$$e^{\beta * x}(A * \cos(\beta * x) + B * \sen(\beta * x)) \quad (9)$$

$$e^{-\beta * x}(C * \cos(\beta * x) + D * \sen(\beta * x)) \quad (10)$$

A Equação 9 é uma função crescente, ou seja, ela aumenta quando x aumenta. Já a Equação 10 é uma função decrescente, ou seja, diminui quando o x aumenta. Então, a função decrescente automaticamente zera em x infinito, permanecendo um valor infinito no caso da função crescente. Como a condição real zera o y quando x é infinito positivo, temos que zera A e B para zera a parcela da função crescente. Ficamos com:

$$y(x) = e^{-\beta * x}(C \cos(\beta * x) + D \sen(\beta * x)) \quad (11)$$

Essa hipótese não permite x negativo na solução. Portanto, deverá ser considerada separadamente a porção negativa de x. Isto será feito posteriormente.

Como existe simetria dos deslocamentos em relação ao eixo y, assim como pode ser visto na Figura 2, haverá giro nulo na origem, $y'(0) = 0$. Sabendo que o giro é a derivada do deslocamento, consegue-se descobrir que C é igual a D e com isso a Equação 11 passa a ser:

$$y(x) = C * e^{-\beta * x}(\cos(\beta * x) + \sen(\beta * x)) \quad (12)$$

Derivando a Equação 12, encontra-se:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -2 * \beta * C * e^{-\beta * x} * \text{sen}(\beta * x) \quad (13)$$

$$M(x) = -E * I * \frac{d^2y}{dx^2} = -2 * E * I * \beta^2 * C * e^{-\beta * x} * (\text{sen}(\beta * x) - \text{cos}(\beta * x)) \quad (14)$$

$$Q(x) = -E * I * \frac{d^3y}{dx^3} = -4 * E * I * \beta^3 * C * e^{-\beta * x} * \text{cos}(\beta * x) \quad (15)$$

Para a situação da Figura 2, sabe-se que, imediatamente à direita de P, a cortante vale $-P/2$. Portanto:

$$Q(0+) = -\frac{P}{2} \rightarrow C = \frac{P}{8 * E * I * \beta^3} = \frac{P * \beta}{2 * k} \quad (16)$$

Sendo assim, as equações para $x > 0$ ficam:

$$y(x) = \frac{P * \beta}{2 * k} * e^{-\beta * x} * (\text{cos}(\beta * x) + \text{sen}(\beta * x)) \quad (17)$$

$$y'(x) = -\frac{P * \beta^2}{k} * e^{-\beta * x} * \text{sen}(\beta * x) \quad (18)$$

$$M(x) = -\frac{P}{4 * \beta} * e^{-\beta * x} * (\text{sen}(\beta * x) - \text{cos}(\beta * x)) \quad (19)$$

$$Q(x) = -\frac{P}{2} * e^{-\beta * x} * \text{cos}(\beta * x) \quad (20)$$

Para $x < 0$, os resultados são aproveitados da parte positiva, considerando as respectivas simetrias ou antissimetrias. Para o caso carga pontual, os diagramas de deslocamento e de momento são simétricos em relação ao eixo y. Já os diagramas da cortante e do giro são antissimétricos. Na prática, nos diagramas simétricos, num valor de x negativo considera-se o valor de x em módulo na equação e o valor final da mesma já é correto. Já para diagramas antissimétricos, num valor de x negativo considera-se o valor de x em módulo na equação e o valor final da mesma deve ser multiplicado por menos um.

Para facilitar os cálculos, as funções anteriormente deduzidas podem ser expressas usando as seguintes funções auxiliares:

$$\varphi(\beta * x) = e^{-\beta * x} * (\cos(\beta * x) + \text{sen}(\beta * x)) \quad (21)$$

$$\psi(\beta * x) = -e^{-\beta * x} * (\text{sen}(\beta * x) - \cos(\beta * x)) \quad (22)$$

$$\theta(\beta * x) = e^{-\beta * x} * \cos(\beta * x) \quad (23)$$

$$\xi(\beta * x) = e^{-\beta * x} * \text{sen}(\beta * x) \quad (24)$$

Chegando-se a:

$$y(x) = \frac{P * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta * x) \quad (25)$$

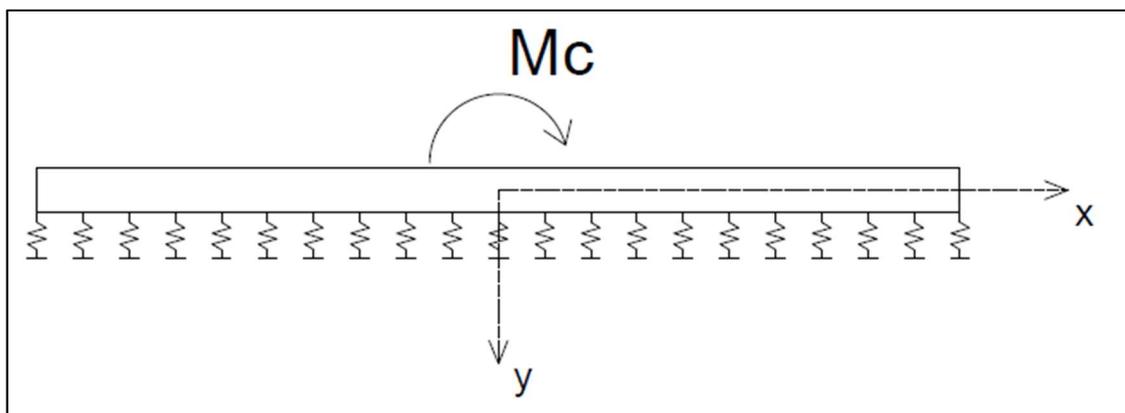
$$y'(x) = -\frac{P * \beta^2}{k} * \xi(\beta * x) \quad (26)$$

$$M(x) = \frac{P}{4 * \beta} * \psi(\beta * x) \quad (27)$$

$$Q(x) = -\frac{P}{2} * \theta(\beta * x) \quad (28)$$

Ainda conforme Sussekind (1977), considerando o carregamento como sendo um momento aplicado, tem-se o apresentado na Figura 3:

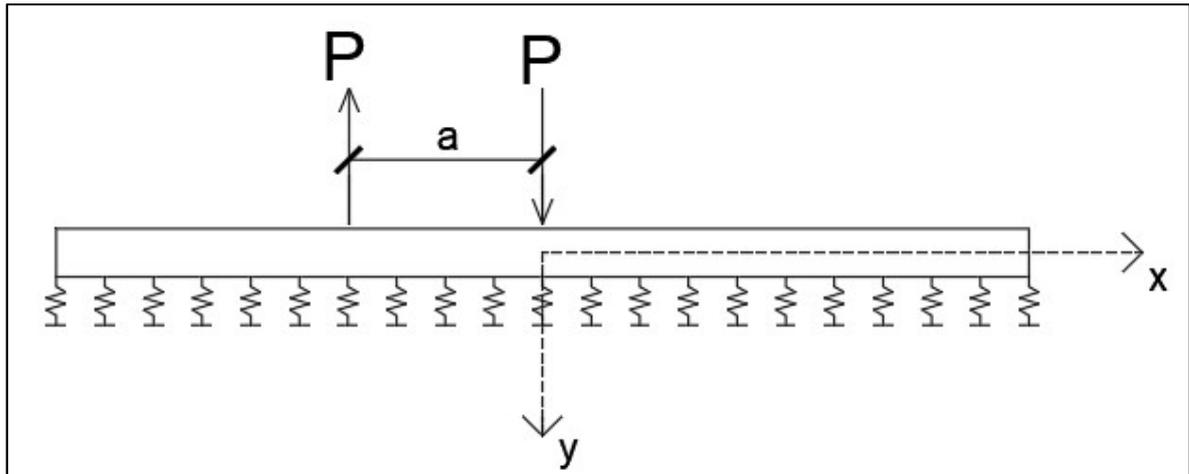
Figura 3 - Viga sobre base elástica com momento concentrado



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Para chegar às equações dos esforços de viga de comprimento infinito com momento concentrado, pode-se transformar, segundo Sussekind (1977), o momento em um binário (Figura 4) e, com o auxílio das Equações 25 a 28, tem-se:

Figura 4 - Momento concentrado transformado em um binário



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{P * \beta}{2 * k} * [\varphi(\beta * x) - \varphi(\beta * (x + a))] \\
 &= -\frac{P * a * \beta}{2 * k} * \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\beta * (x + a)) - \varphi(\beta * x)}{a} \right] = \\
 &= -\frac{P * a * \beta}{2 * k} * \frac{d\varphi(\beta * x)}{dx} = -\frac{M_c * \beta}{2 * k} * [-2 * \beta * \xi(\beta * x)] = \frac{M_c * \beta^2}{k} * \xi(\beta * x) \\
 \therefore y(x) &= \frac{M_c * \beta^2}{k} * \xi(\beta * x) \tag{29}
 \end{aligned}$$

De modo semelhante ao que foi feito para carga pontual, chega-se às equações para $x > 0$:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{M_c * \beta^3}{k} * \psi(\beta * x) \tag{30}$$

$$M(x) = -E * I * \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_c}{2} * \theta(\beta * x) \tag{31}$$

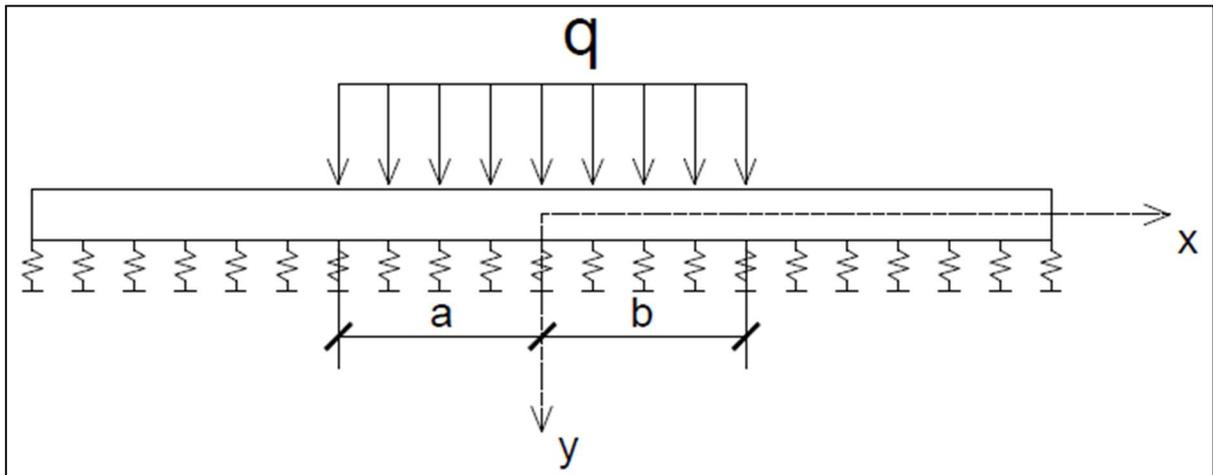
$$Q(x) = -E * I * \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{M_c * \beta}{2} * \varphi(\beta * x) \tag{32}$$

Para $x < 0$ usa-se a simetria ou antissimetria. Para momento concentrado, os diagramas de cortante e giro são simétricos em relação ao eixo y e os diagramas de deslocamento e momento fletor são antissimétricos.

O último carregamento a ser considerado é a carga distribuída. Segue a teoria conforme Sussekind (1977). Neste caso, há formulações diferentes para a região dentro e fora da área de atuação da carga.

Para a área de atuação da carga distribuída (Figura 5):

Figura 5 - Viga sobre base elástica com carga distribuída (trecho interno)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

De acordo com Sussekind (1977), considerando uma carga equivalente pontual $q * dx$ aplicada a uma distância x da origem do sistema cartesiano, dentro da região delimitada pela carga distribuída, pode-se, com a integração da Equação 25, chegar a:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{q * \beta}{2 * k} * \int_0^a \varphi(\beta * x) dx + \int_0^b \varphi(\beta * x) dx \\
 &= \frac{q}{2 * k} * [(1 - \theta(\beta * a)) + (1 - \theta(\beta * b))] = \\
 \therefore y(x) &= \frac{q}{2 * k} * [2 - \theta(\beta * a) - \theta(\beta * b)] \tag{33}
 \end{aligned}$$

Fazendo igualmente para $y'(x)$, $M(x)$ e $Q(x)$, chega-se a:

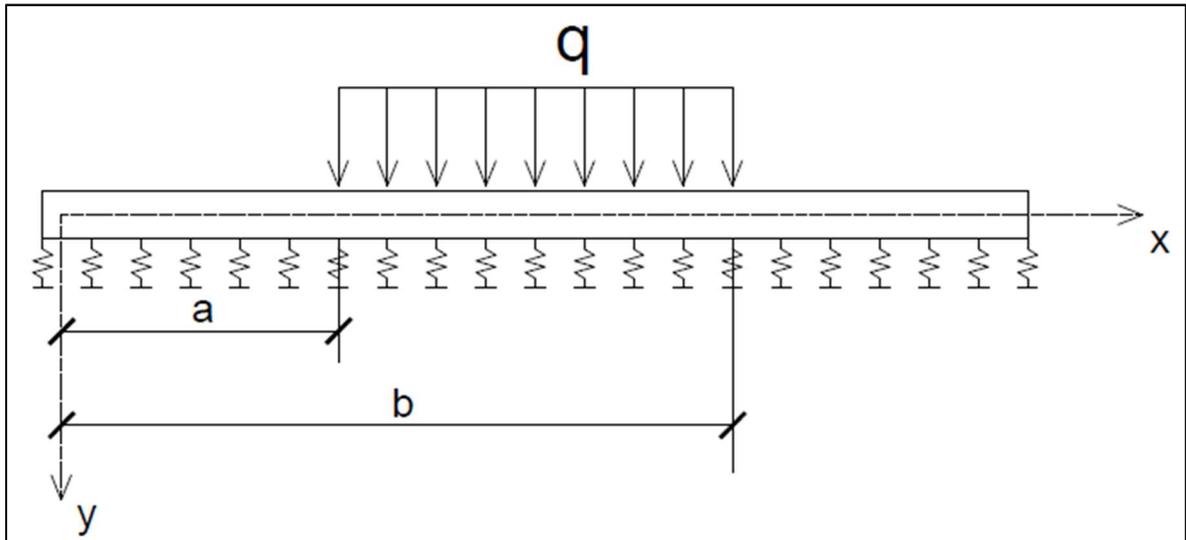
$$y'(x) = \frac{q * \beta}{2 * k} * [\varphi(\beta * a) - \varphi(\beta * b)] \tag{34}$$

$$M(x) = \frac{q}{4 * \beta^2} * [\xi(\beta * a) + \xi(\beta * b)] \quad (35)$$

$$Q(x) = \frac{q}{4 * \beta} * [\psi(\beta * a) - \psi(\beta * b)] \quad (36)$$

Para a região fora da atuação da carga distribuída (Figura 6):

Figura 6 - Viga sobre base elástica com carga distribuída (trecho externo)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

De modo semelhante ao que foi apresentado para o trecho dentro da região da carga, para o trecho externo à esquerda do carregamento chega-se a:

$$y(x) = \frac{q}{2 * k} * [\theta(\beta * a) - \theta(\beta * b)] \quad (37)$$

$$y'(x) = \frac{q * \beta}{2 * k} * [\varphi(\beta * a) - \varphi(\beta * b)] \quad (38)$$

$$M(x) = -\frac{q}{4 * \beta^2} * [\xi(\beta * a) - \xi(\beta * b)] \quad (39)$$

$$Q(x) = \frac{q}{4 * \beta} * [\psi(\beta * a) - \psi(\beta * b)] \quad (40)$$

Para o lado externo à direita da carga, usa-se também a simetria e antissimetria. Os diagramas de deslocamento e de momento são simétricos em relação ao eixo y. Já os diagramas de cortante e de giro são antissimétricos.

Foram deduzidas as formulações para cargas isoladas. Se houver uma combinação de cargas, vale a superposição dos efeitos.

2.2.2 Viga de comprimento semi-infinito

Será resumida a teoria apresentada em Sussekind (1977). As vigas de comprimento semi-infinito são aquelas que têm uma das bordas bastante influenciada pela carga e a outra não. Obviamente, a extremidade que tem a influência da carga é que terá importância na teoria e é a ela que serão feitas referências na continuidade deste texto. Tais extremidades podem ser livres, apoiadas ou engastadas.

De acordo com Sussekind (1977), para resolver o problema de viga semi-infinita, primeiramente, tenta-se recair no problema de viga infinita explicado anteriormente. Sendo assim, se a viga fosse infinita, ela teria um trecho que extrapolaria a extremidade que possui o vínculo.

Se a borda for livre, de fato não pode haver ali momento fletor e cortante. Porém, no cálculo de uma viga semi-infinita usando a teoria de viga infinita (viga infinita equivalente), aparece momento e cortante na borda. Sendo assim, aplica-se uma carga pontual P_0 e um momento M_{c0} no ponto em questão (borda afetada pela carga) de modo que os esforços, ao somar com os esforços da viga real (semi-infinita) são anulados.

Segue a Figura 7 com uma viga com bordo livre à esquerda e outra com bordo livre à direita, e, após isso, o sistema de equações a ser resolvido para esses casos:

Figura 7 - Vigas semi-infinitas de bordo livre



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O sistema de equações para viga de comprimento semi-infinito de bordo livre à esquerda, é criado a partir de P_0 e M_{c_0} aplicado nas Equações 27, 28, 31 e 32, como pode ser visto abaixo:

$$\begin{cases} \frac{P_0}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{M_{c_0}}{2} * \theta(0) = -M_A \\ -\frac{P_0}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c_0} * \beta}{2} * \varphi(0) = -Q_A \end{cases} \quad (41)$$

Em que:

M_A : momento fletor em A calculado considerando a viga como comprimento infinito com as cargas originais.

Q_A : esforço cortante em A calculado considerando a viga como comprimento infinito com as cargas originais.

Obs.: para resolver numericamente o sistema linear anterior e os outros que aparecem na teoria, foi utilizado o Método de Gauss, que pode ser estudado em Rugiero e Lopes (1996). Sobre este assunto, pode-se acessar: <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>

Portanto, para calcular os esforços finais, conforme explicações anteriores, resolve-se uma viga infinita equivalente com as ações originais e P_0 e M_{c_0} obtidos a partir da resolução do sistema linear de equações 41.

Quando o bordo livre é à direita, além das Equações 27, 28, 31 e 32, deve considerar as simetrias e antissimetrias, pois x é negativo. Assim o sistema de equações fica:

$$\begin{cases} \frac{P_0}{4 * \beta} * \psi(0) - \frac{M_{c_0}}{2} * \theta(0) = -M_B \\ \frac{P_0}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c_0} * \beta}{2} * \varphi(0) = -Q_B \end{cases} \quad (42)$$

Em que:

M_B : momento fletor em B calculado considerando a viga como comprimento infinito com as cargas originais.

Q_B : esforço cortante em B calculado considerando a viga como comprimento infinito com as cargas originais.

Para viga semi-infinita apoiada (Figura 8):

Figura 8 - Vigas semi-infinitas de bordo apoiado



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

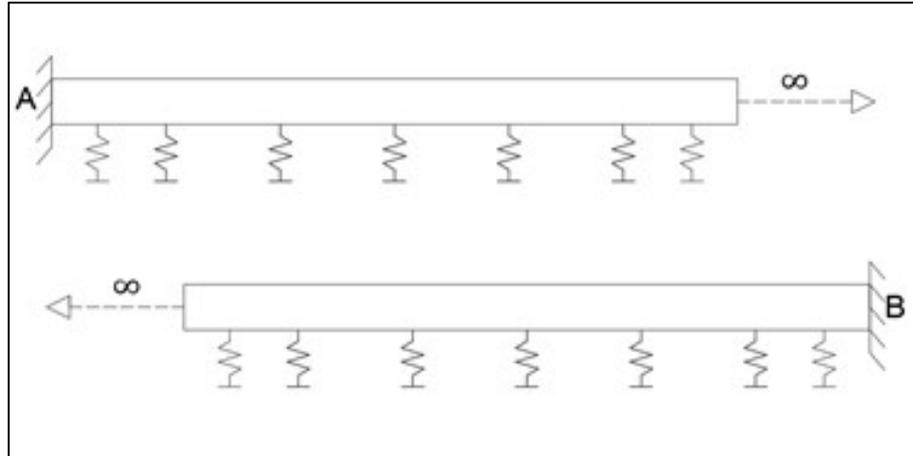
No caso de borda apoiada, as variáveis a serem anuladas, obviamente, são o deslocamento e o momento fletor. Sendo assim, os sistemas de equações são a Equação 43 para viga apoiada à esquerda e a Equação 44 para viga apoiada à direita (P_0 e M_{c_0} aplicado nas Equações 25, 27, 29 e 31):

$$\begin{cases} \frac{P_0 * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{Mc_0 * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_A \\ \frac{P_0}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{Mc_0}{2} * \theta(0) = -M_A \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \frac{P_0 * \beta}{2 * k} * \varphi(0) - \frac{Mc_0 * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_B \\ \frac{P_0}{4 * \beta} * \psi(0) - \frac{Mc_0}{2} * \theta(0) = -M_B \end{cases} \quad (44)$$

Para viga semi-infinita engastada (Figura 9):

Figura 9 - Vigas semi-infinitas de bordo engastado



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

No caso de borda engastada, as variáveis a serem anuladas, obviamente, são o deslocamento e o giro (derivada do deslocamento). Sendo assim, os sistemas de equações estão a seguir, sendo a Equação 45 para viga semi-infinita com bordo engastado à esquerda e a Equação 46 para viga semi-infinita com bordo engastado à direita (P_0 e M_{c_0} aplicado nas Equações 25, 26, 29 e 30):

$$\begin{cases} \frac{P_0 * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{M_{c_0} * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_A \\ -\frac{P_0 * \beta^2}{k} * \xi(0) + \frac{M_{c_0} * \beta^3}{k} * \psi(0) = -y'_A \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} \frac{P_0 * \beta}{2 * k} * \varphi(0) - \frac{M_{c_0} * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_B \\ -\frac{P_0 * \beta^2}{k} * \xi(0) + \frac{M_{c_0} * \beta^3}{k} * \psi(0) = -y'_B \end{cases} \quad (46)$$

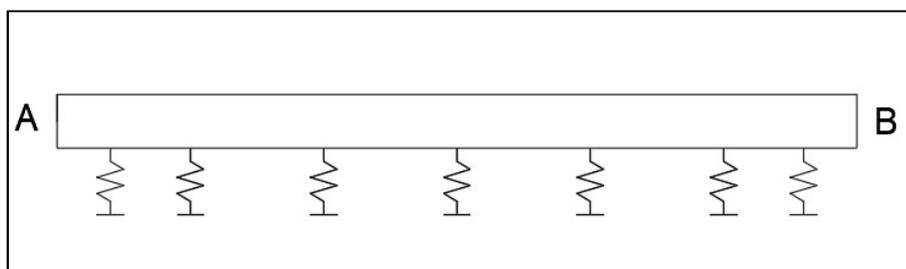
Se houver várias ações na viga, antes de resolver os sistemas, pode-se fazer a superposição dos efeitos para calcular os esforços em A ou B.

2.2.3 Viga de comprimento finito

As vigas de comprimento finito podem ser livres, apoiadas ou engastadas nas duas extremidades, ou ainda possuir combinações diferentes de vínculos. Para resolver o problema, procede-se de modo semelhante ao feito para o problema de viga semi-infinita. O que muda é que temos condições de compatibilidade não somente em uma das extremidades, mas sim nas duas.

Segue na Figura 10 uma viga de comprimento finito com bordos livres, e logo abaixo o sistema de equações:

Figura 10 - Viga de comprimento finito com bordos livres



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

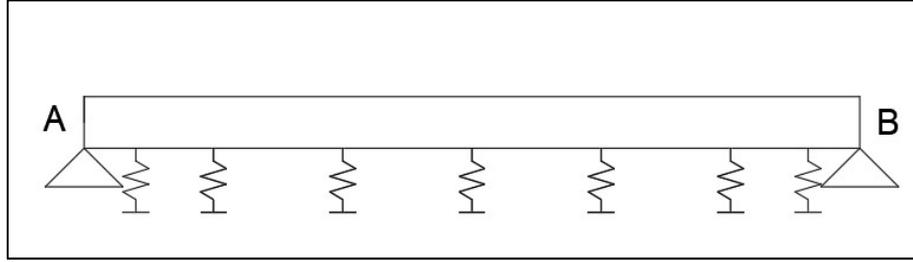
$$\begin{cases} \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{M_{c_{0A}}}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c_{0B}}}{2} * \theta(\beta l) = -M_A \\ -\frac{P_{0A}}{2} * \theta(0) + \frac{P_{0B}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{M_{c_{0A}} * \beta}{2} * \varphi(0) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta}{2} * \varphi(\beta l) = -Q_A \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{M_{c_{0A}}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{M_{c_{0B}}}{2} * \theta(0) = -M_B \\ -\frac{P_{0A}}{2} * \theta(\beta l) + \frac{P_{0B}}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c_{0A}} * \beta}{2} * \varphi(\beta l) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta}{2} * \varphi(0) = -Q_B \end{cases} \quad (47)$$

Em que:

l : comprimento da viga.

Segue na Figura 11 uma viga de comprimento finito com bordos apoiados, e logo abaixo o sistema de equações:

Figura 11 - Viga de comprimento finito com bordos apoiados

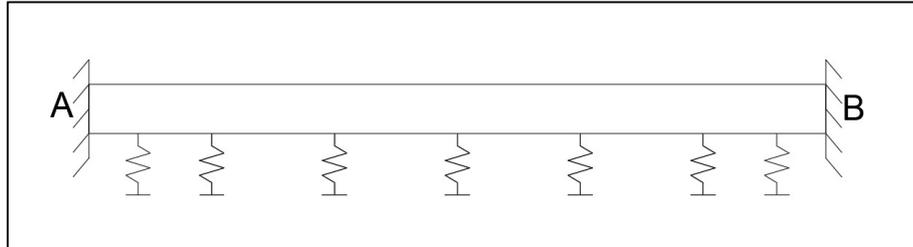


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\begin{cases} \frac{P_{0A} * \beta}{2 * K} * \varphi(0) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * K} * \varphi(\beta l) + \frac{Mc_{0A} * \beta^2}{K} * \xi(0) - \frac{Mc_{0B} * \beta^2}{K} * \xi(\beta l) = -y_A \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{Mc_{0A}}{2} * \theta(0) - \frac{Mc_{0B}}{2} * \theta(\beta l) = -M_A \\ \frac{P_{0A} * \beta}{2 * K} * \varphi(\beta l) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * K} * \varphi(0) + \frac{Mc_{0A} * \beta^2}{K} * \xi(\beta l) - \frac{Mc_{0B} * \beta^2}{K} * \xi(0) = -y_B \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{Mc_{0A}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{Mc_{0B}}{2} * \theta(0) = -M_B \end{cases} \quad (48)$$

Para viga de comprimento finito de bordos engastados, segue a Figura 12:

Figura 12 - Viga de comprimento finito com bordos engastados

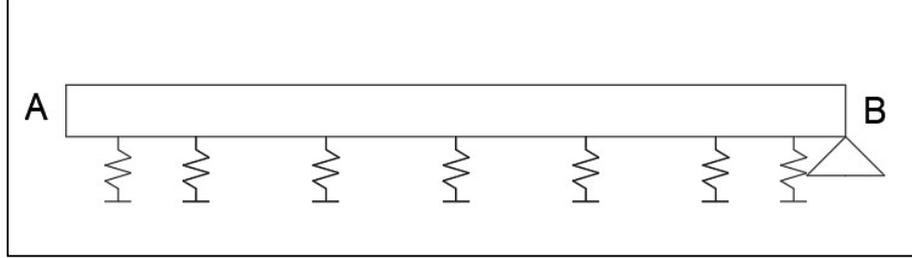


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\begin{cases} \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{Mc_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(0) - \frac{Mc_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) = -y_A \\ -\frac{P_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(0) + \frac{P_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) + \frac{Mc_{0A} * \beta^3}{k} * \psi(0) + \frac{Mc_{0B} * \beta^3}{k} * \psi(\beta l) = -y'_A \\ \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{Mc_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) - \frac{Mc_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_B \\ \frac{P_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) - \frac{P_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(0) + \frac{Mc_{0A} * \beta^3}{k} * \psi(\beta l) + \frac{Mc_{0B} * \beta^3}{k} * \psi(0) = -y'_B \end{cases} \quad (49)$$

Para viga de comprimento finito de bordo livre e apoiado (Figura 13):

Figura 13 - Viga de comprimento finito de bordo livre e apoiado

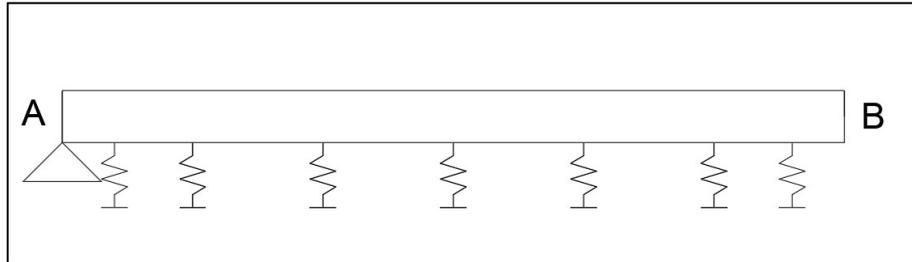


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\begin{cases} \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{Mc_{0A}}{2} * \theta(0) - \frac{Mc_{0B}}{2} * \theta(\beta l) = -M_A \\ -\frac{P_{0A}}{2} * \theta(0) + \frac{P_{0B}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{Mc_{0A} * \beta}{2} * \varphi(0) - \frac{Mc_{0B} * \beta}{2} * \varphi(\beta l) = -Q_A \\ \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{Mc_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) - \frac{Mc_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_B \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{Mc_{0A}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{Mc_{0B}}{2} * \theta(0) = -M_B \end{cases} \quad (50)$$

Para viga de comprimento finito de bordo apoiado e livre (Figura 14):

Figura 14 - Viga de comprimento finito de bordo apoiado e livre

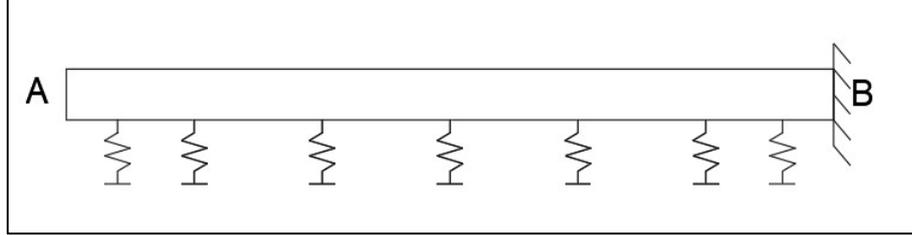


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\begin{cases} \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{Mc_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(0) - \frac{Mc_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) = -y_A \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{Mc_{0A}}{2} * \theta(0) - \frac{Mc_{0B}}{2} * \theta(\beta l) = -M_A \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{Mc_{0A}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{Mc_{0B}}{2} * \theta(0) = -M_B \\ -\frac{P_{0A}}{2} * \theta(\beta l) + \frac{P_{0B}}{2} * \theta(0) - \frac{Mc_{0A} * \beta}{2} * \varphi(\beta l) - \frac{Mc_{0B} * \beta}{2} * \varphi(0) = -Q_B \end{cases} \quad (51)$$

Para viga de comprimento finito de bordo livre e engastado (Figura 15):

Figura 15 - Viga de comprimento finito de bordo livre e engastado

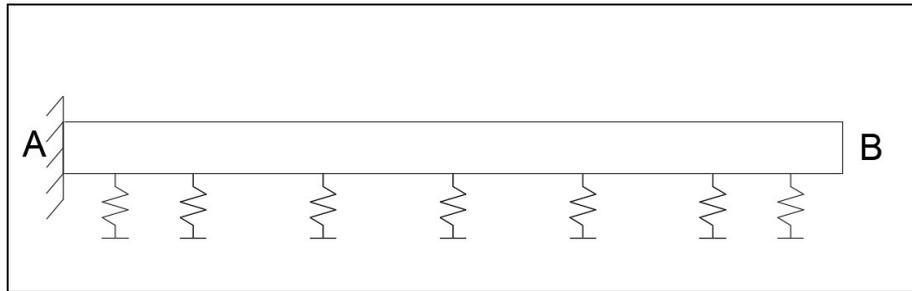


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\begin{cases} \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{M_{c_{0A}}}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c_{0B}}}{2} * \theta(\beta l) = -M_A \\ -\frac{P_{0A}}{2} * \theta(0) + \frac{P_{0B}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{M_{c_{0A}} * \beta}{2} * \varphi(0) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta}{2} * \varphi(\beta l) = -Q_A \\ \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_B \\ \frac{P_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) - \frac{P_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(0) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^3}{k} * \psi(\beta l) + \frac{M_{c_{0B}} * \beta^3}{k} * \psi(0) = -y'_B \end{cases} \quad (52)$$

Para viga de comprimento finito de bordo engastado e livre (Figura 16):

Figura 16 - Viga de comprimento finito de bordo engastado e livre

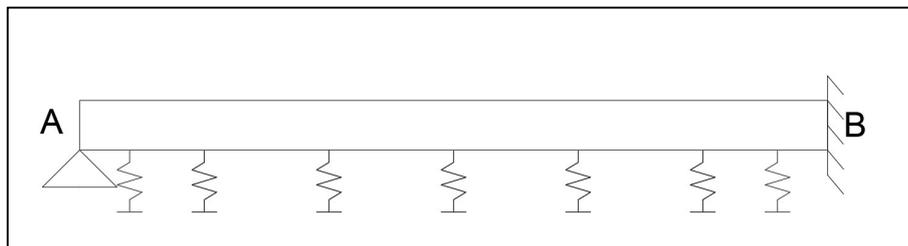


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\begin{cases} \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^2}{k} * \xi(0) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) = -y_A \\ -\frac{P_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(0) + \frac{P_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^3}{k} * \psi(0) + \frac{M_{c_{0B}} * \beta^3}{k} * \psi(\beta l) = -y'_A \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{M_{c_{0A}}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{M_{c_{0B}}}{2} * \theta(0) = -M_B \\ -\frac{P_{0A}}{2} * \theta(\beta l) + \frac{P_{0B}}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c_{0A}} * \beta}{2} * \varphi(\beta l) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta}{2} * \varphi(0) = -Q_B \end{cases} \quad (53)$$

Para viga de comprimento finito de bordo apoiado e engastado (Figura 17):

Figura 17 - Viga de comprimento finito de bordo apoiado e engastado

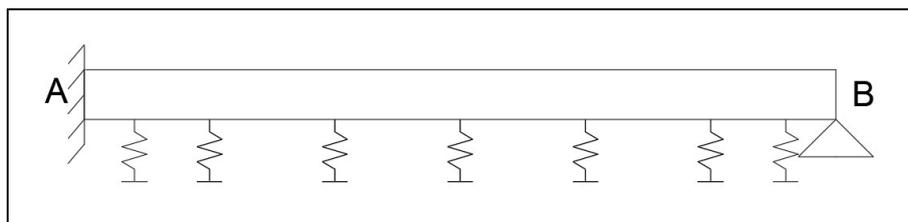


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^2}{k} * \xi(0) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) = -y_A \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{M_{c_{0A}}}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c_{0B}}}{2} * \theta(\beta l) = -M_A \\ \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_B \\ \frac{P_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) - \frac{P_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(0) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^3}{k} * \psi(\beta l) + \frac{M_{c_{0B}} * \beta^3}{k} * \psi(0) = -y'_B \end{array} \right. \quad (54)$$

Para viga de comprimento finito de bordo engastado e apoiado (Figura 18):

Figura 18 - Viga de comprimento finito de bordo engastado e apoiado



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^2}{k} * \xi(0) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) = -y_A \\ -\frac{P_{0A} * \beta^2}{k} * \xi(0) + \frac{P_{0B} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^3}{k} * \psi(0) + \frac{M_{c_{0B}} * \beta^3}{k} * \psi(\beta l) = -y'_A \\ \frac{P_{0A} * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta l) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{M_{c_{0A}} * \beta^2}{k} * \xi(\beta l) - \frac{M_{c_{0B}} * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_B \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{M_{c_{0A}}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{M_{c_{0B}}}{2} * \theta(0) = -M_B \end{array} \right. \quad (55)$$

Se houver várias ações na viga, antes de resolver os sistemas, pode-se fazer a superposição dos efeitos para calcular os esforços em A ou B.

3 RESULTADOS

O programa apresentado neste trabalho foi criado como um módulo de um programa principal já existente e disponibilizado online, denominado IFESTRUT², criada por Santos Junior, Lopes e Nirschl (2016), que tem uma área com comandos tipo “CAD” (que será aqui chamada de “base CAD”) onde é possível desenhar qualquer estrutura linear com carregamentos e vínculos.

3.1 Base CAD

Como explicado, é nessa área que o usuário desenha a estrutura, ações e vínculos, como se pode ver na Figura 19:

Figura 19 - Interface do IFESTRUT



Fonte: <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut/lfestrut.php?>

É possível inserir a estrutura de duas maneiras: ou desenhando a partir da tela em branco ou abrindo um arquivo anteriormente salvo (botão ABRIR como pode ser visto na Figura 19).

² <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut/lfestrut.php?>

Para desenhar a estrutura, primeiramente é preciso configurar as características das barras, E (módulo de elasticidade do material), I (momento de inércia), e A (área da seção), para separação dos números inteiros dos decimais é necessário que utilize o ponto. Para o cálculo de viga sobre base elástica, pode-se deixar a área da seção A com valor unitário padrão, pois este parâmetro não tem influência nos cálculos, conforme a teoria apresentada anteriormente. Depois, clique no símbolo do lápis (primeiro ícone da segunda linha de botões, como pode ser visto na Figura 19) para desenhar as barras da estrutura. Para a criação do primeiro ponto (nó 0) é necessário clicar na área de desenho. Para o desenho dos próximos nós, irá aparecer, do lado do botão “VÍNCULO”, uma caixa de texto para escrever as suas coordenadas relativas. Pode-se também clicar num segundo ponto diretamente na tela.

Desenhadas as barras, o próximo passo é inserir os vínculos: na caixa de combinação “VÍNCULO”, escolhe-se o apoio para cada nó. Para o módulo de viga sobre base elástica, a opção “RÓTULA EM NÓ” não poderá ser usada. Além dos apoios de extremidade, escolhe-se a opção “BASE ELÁSTICA (EM BARRA)” e digita-se o valor do coeficiente de rigidez do solo k a ser aplicado em todas as barras.

Percebe-se que a unidade do k_v é de força sobre volume, como explicado anteriormente, por exemplo, kN/m^3 . No programa apresentado neste trabalho, deve-se entrar com k em kN/m^2 , por exemplo. A conversão deve ser feita previamente pelo usuário multiplicando k_v pela largura da viga. O significado dessa unidade (kN/m^2) pode ser explicado considerando a mesma como, por exemplo, $(\text{kN}/\text{m})/\text{m}$, ou seja, kN por metro de deslocamento vertical distribuído por metro de viga na horizontal.

Depois dos vínculos, é necessário escolher as ações no ícone “AÇÕES”. As ações aceitas pela teoria aqui descrita são carga vertical linearmente distribuída, força concentrada vertical e momento fletor concentrado. Após isso, a estrutura estará pronta para ser calculada, bastando clicar no botão “FUNÇÕES” ao final da página e escolher a opção “VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA”.

Na tela desenho, existem outros botões que podem ser usados, como: “Exibir tudo” (para mostrar a estrutura toda na tela), “Zoom +” e “Zoom -” (para dar zoom na tela), “Pan” (para movimentar a vista da estrutura), “OPÇÕES” (para alterar o tamanho da letra das propriedades das barras), e “Apagar tudo” (para limpar a tela).

3.2 Módulo de viga sobre base elástica

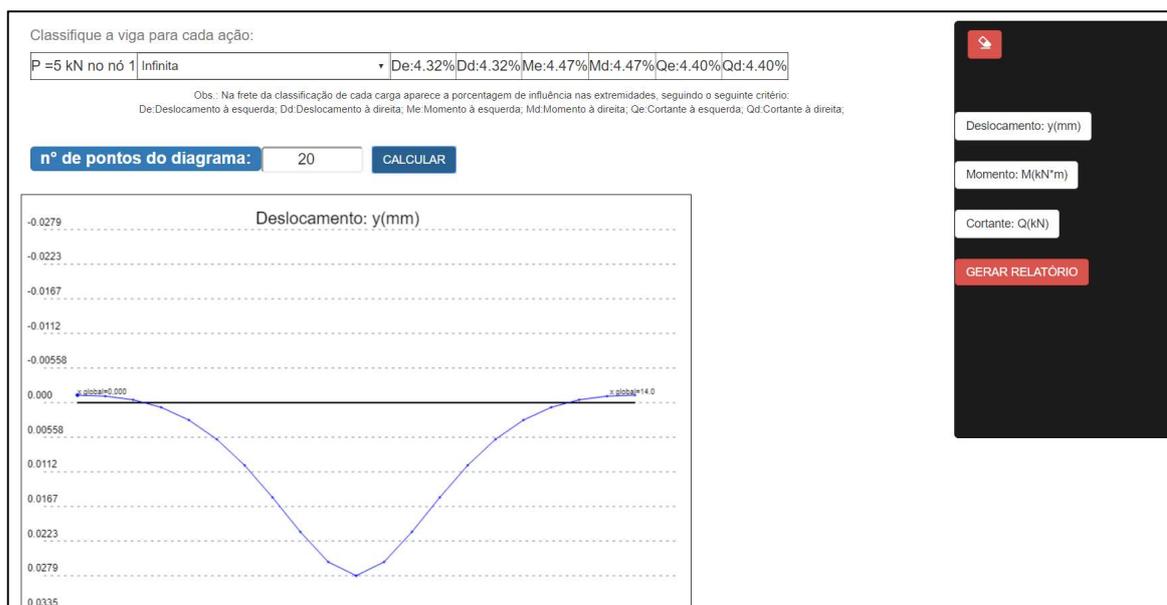
Esta é a parte do programa em que foram programados todos os cálculos, de acordo com a teoria apresentada na revisão bibliográfica. Como explicado anteriormente, foi usada a linguagem JavaScript.

Antes de aparecer os resultados, internamente no programa se fazem necessárias mais algumas configurações, são elas: classificar cada ação da viga como de influência infinita, semi-infinita ou finita e escolher o número de pontos a serem plotados no gráfico.

Em um primeiro momento, a classificação da viga é dada internamente pelo programa usando um critério criado pelos autores: considera-se que os esforços calculados com a teoria de viga infinita não têm mais influência na extremidade da viga quando eles forem menores que 5% do valor do esforço máximo calculado para toda a viga em módulo. Se isto acontecer nas duas extremidades, a viga é infinita. Se ocorrer em apenas uma, é semi-infinita. No entanto, o usuário tem a liberdade de optar por outra classificação conforme a Figura 20, uma vez que à frente da classificação da viga é possível visualizar a porcentagem de influência de cada esforço nas extremidades em relação ao máximo. O programa automaticamente irá recalculer os esforços considerando a escolha feita. Isso é feito para cada carga separadamente, sendo que, posteriormente, é aplicada a superposição dos efeitos.

Como próximo passo, o usuário deve clicar no botão "CALCULAR". Com isso, irá aparecer o diagrama de deslocamento da estrutura e, ao lado, irá aparecer uma coluna à direita com quatro botões, como ilustrado na Figura 20.

Figura 20 - Exemplo de tela com resultados



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Os botões na cor branca são para escolher o diagrama que será apresentado na tela de desenho ao lado como resultado. As opções são: deslocamento, momento fletor e cortante. O botão vermelho, abaixo dos brancos, é para gerar o relatório de estudo, que é o objetivo principal alcançado neste trabalho.

3.3 Relatório PDF

O relatório em pdf foi criado usando a biblioteca Pdfmake (2018). Nele, primeiramente é apresentado o desenho da estrutura, com as características das barras (E – módulo de elasticidade, I – momento de inércia, A – área da seção, e L – comprimento da barra). Depois são mostrados os mesmos parâmetros com as unidades transformadas para o sistema internacional de medidas, pois foi determinado pelos autores que o programa trabalharia nesse formato.

Depois dos dados de cálculo, é conferido, pelo parâmetro β , se a viga pode ser calculada como sobre base elástica. Na sequência, há uma breve teoria das considerações iniciais do método e então começa a resolução do passo a passo de cálculo. Sempre, antes de apresentar algum resultado intermediário, existe uma explicação da teoria e as fórmulas utilizadas para que o usuário consiga entender os

cálculos. Os resultados parciais sempre são apresentados no formato de tabela, e os resultados finais também na forma de diagramas.

3.4 Exemplos

O IFESTRUT contendo o módulo para o cálculo de viga sobre base elástica está disponível na página do NEV³. A seguir, serão apresentados alguns exemplos de estruturas calculadas pelo IFESTRUT. Para otimização do texto deste trabalho, ora serão apresentadas as telas com os diagramas, ora será apresentado o relatório completo.

Sendo assim, para a comparação e validação dos resultados, foi utilizado o Ftool (2017) com apoios discretos em mola em nós a cada 10 cm, tentando chegar próximo a uma base elástica contínua. O valor do coeficiente de rigidez do solo k deve considerar a área de influência do nó, ou seja, se o k inserido no IFESTRUT for, por exemplo, 400 kgf/cm², em cada nó do modelo no Ftool (2017) espaçado de 10 em 10 cm deve ser colocado $k = 400 \cdot 10 = 4000$ kgf/cm. Quando se analisa os resultados entre o IFESTRUT e o Ftool (2017) deve-se levar em conta que a convenção de sinais está diferente em relação ao eixo y . No IFESTRUT o positivo é para baixo e no Ftool (2017) para cima, influenciando principalmente nos diagramas de cortantes.

3.4.1 Exemplo 01 - Viga infinita com momento aplicado (Figuras 21 a 24)

Para os valores de entrada desse e dos demais exemplos foi utilizado o módulo de elasticidade do concreto como sendo 21 GPa, e uma seção retangular de 50x105cm, sendo que sua inércia é dada pela Equação 56:

$$I = \frac{b * h^3}{12} = \frac{0,5 * 1,05^3}{12} = 0,04823 \text{ m}^4 \quad (56)$$

³ <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/>

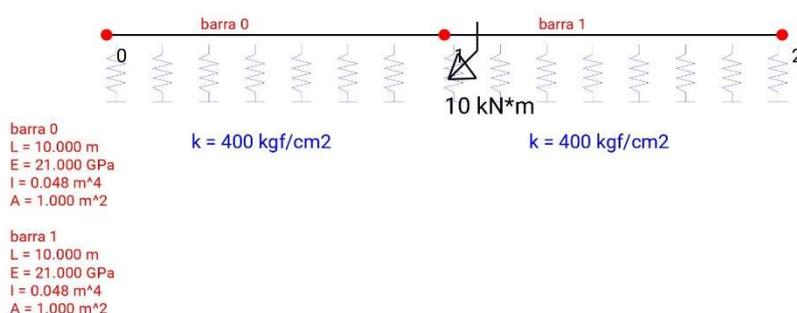
Figura 21 - Relatório PDF do exemplo 01 - Continua



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Voluporanga

NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Cálculo de viga sobre base elástica
Data: 31/11/2017
Autor: Isabela Cassia Dominical Parra
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica Voluntária
Curso: Engenharia Civil

A viga a calcular é a seguinte:



Dados da Estrutura apresentada:

Coefficiente de Rigidez (k): $400 \text{ kgf/cm}^2 = 4.00 \text{e}+4 \text{ kN/m}^2$
Módulo de Elasticidade (E): $21.0 \text{ GPa} = 2.10 \text{e}+7 \text{ kN/m}^2$
Momento de Inércia (I): 0.0482 m^4
Comprimento da Viga (L): 20.0 m

Abaixo segue a resolução:

Parâmetro β :

$$\beta = (k/(4 \cdot E \cdot I))^{1/4} = (4.00 \text{e}+4 / (4 \cdot 2.10 \text{e}+7 \cdot 0.0482))^{1/4} = 0.31522 \text{ m}^{-1}$$

Quando $\beta \cdot L < \pi/4$, a viga pode ser considerada infinitamente rígida, sem deformações e esforços por flexão, sendo a reação de apoio com o mesmo módulo, mas oposta ao carregamento, portanto não sendo válida a teoria de viga sobre base elástica.

$$\beta \cdot L = 6.3044 > \pi/4 = 0.7854$$

Portanto, é necessário considerar os efeitos da base elástica.

Dependendo da influência da carga nas extremidades da viga, considera-se a mesma como infinita, semi-infinita ou finita, ou seja, se a carga está tão distante das extremidades direita e esquerda que não tem mais influência ali, a viga é considerada como infinita. Se a carga está muito longe de uma das bordas e perto da outra, a viga é considerada semi-infinita. E, finalmente, se a carga está perto das duas extremidades, a viga é considerada finita. Para este programa, caso a influência da carga provoque deslocamento, cortante e momento fletor nas extremidades com valores em módulo menores que 5% de

Figura 21 - Relatório PDF do exemplo 01 - Continua

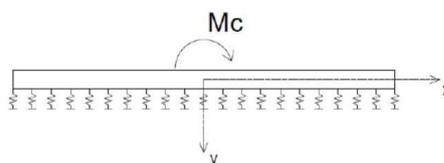
seus valores máximos em módulo, sugere-se ao usuário a classificação como infinita. Porém, o usuário tem a liberdade de classificá-la de outra maneira. Prevalece a escolha do usuário.

****Momento aplicado:**

Assim como é feito para os outros tipos de ação, a solução da viga começa pela resolução da mesma como se fosse uma viga infinita (funções a seguir). Após isso, caso ela não seja infinita, são realizados cálculos adicionais.

É necessário considerar a origem local, $x=0$, no ponto de aplicação do momento. Portanto, será utilizado uma coordenada global (x_g), e uma coordenada local (x) para cada seção da viga, para cada momento aplicado.

As funções abaixo (viga infinita) são aplicadas somente para x positivo. Analisando as funções auxiliares, conclui-se que os diagramas de deslocamento (y) e de esforço cortante (Q) possuem simetria em relação ao eixo y , portanto os valores dos pontos são iguais tanto para " x " negativo quanto para " x " positivo. Já o diagrama de momento fletor (M) é antissimétrico em relação ao eixo y , ou seja, os valores dos pontos com " x " negativo possuem sinais contrários aos dos pontos " x " positivos.



$$\xi = e^{-\beta x} * \text{sen}(\beta x)$$

$$y = \frac{Mc * \beta^2}{k} * \xi(\beta x)$$

$$\psi = -e^{-\beta x} * (\text{sen}(\beta x) - \text{cos}(\beta x))$$

$$y' = \frac{Mc * \beta^3}{k} * \psi(\beta x)$$

$$\theta = e^{-\beta x} * \text{cos}(\beta x)$$

$$M = \frac{Mc}{2} * \theta(\beta x)$$

$$\varphi = e^{-\beta x} * (\text{cos}(\beta x) + \text{sen}(\beta x))$$

$$Q = \frac{-Mc * \beta}{2} * \varphi(\beta x)$$

Momento Concentrado:

$Mc = 10.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ - no nó 1

Considerando viga infinita:

x global	x	$\xi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	$\varphi(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	-10.0	-0.000454	-0.0428	-0.0432	0.0000113	0.214	0.0681
1.000	-9.00	0.0176	-0.0559	-0.0383	-0.000437	0.280	0.0604
2.000	-8.00	0.0467	-0.0654	-0.0187	-0.00116	0.327	0.0295
3.000	-7.00	0.0886	-0.0654	0.0232	-0.00220	0.327	-0.0366
4.000	-6.00	0.143	-0.0475	0.0957	-0.00356	0.238	-0.151
5.000	-5.00	0.207	-0.00110	0.206	-0.00514	0.00549	-0.324
6.000	-4.00	0.270	0.0864	0.356	-0.00670	-0.432	-0.562
7.000	-3.00	0.315	0.227	0.542	-0.00782	-1.14	-0.855

Figura 21 - Relatório PDF do exemplo 01 - Continua

8.000	-2.00	0.314	0.430	0.744	-0.00780	-2.15	-1.17
9.000	-1.00	0.226	0.694	0.920	-0.00562	-3.47	-1.45
10.000	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	-5.00	-1.58
10.000	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	5.00	-1.58
11.000	1.00	0.226	0.694	0.920	0.00562	3.47	-1.45
12.000	2.00	0.314	0.430	0.744	0.00780	2.15	-1.17
13.000	3.00	0.315	0.227	0.542	0.00782	1.14	-0.855
14.000	4.00	0.270	0.0864	0.356	0.00670	0.432	-0.562
15.000	5.00	0.207	-0.00110	0.206	0.00514	-0.00549	-0.324
16.000	6.00	0.143	-0.0475	0.0957	0.00356	-0.238	-0.151
17.000	7.00	0.0886	-0.0654	0.0232	0.00220	-0.327	-0.0366
18.000	8.00	0.0467	-0.0654	-0.0187	0.00116	-0.327	0.0295
19.000	9.00	0.0176	-0.0559	-0.0383	0.000437	-0.280	0.0604
20.000	10.0	-0.000454	-0.0428	-0.0432	-0.0000113	-0.214	0.0681

Classificação da Viga para o carregamento em questão: (todos valores estão sendo considerados em módulo)

Deslocamento Máximo: 0.00782 mm

Deslocamento no nó 0 = 0.0000113 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.000391 mm

Deslocamento no nó 2 = 0.0000113 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.000391 mm

Momento Fletor Máximo: 5.00 kN*m

Momento Fletor no nó 0 = 0.214 kN*m \leq 5% do Momento Fletor Máximo = 0.250 kN*m

Momento Fletor no nó 2 = 0.214 kN*m \leq 5% do Momento Fletor Máximo = 0.250 kN*m

Cortante Máxima: 1.58 kN

Cortante no nó 0 = 0.0681 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.0788 kN

Cortante no nó 2 = 0.0681 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.0788 kN

Portanto a classificação recomendada é: Viga Infinita

Escolha do Usuário: Viga Infinita

Como a viga para esse tipo de carregamento é infinita, não se fazem necessários cálculos adicionais.

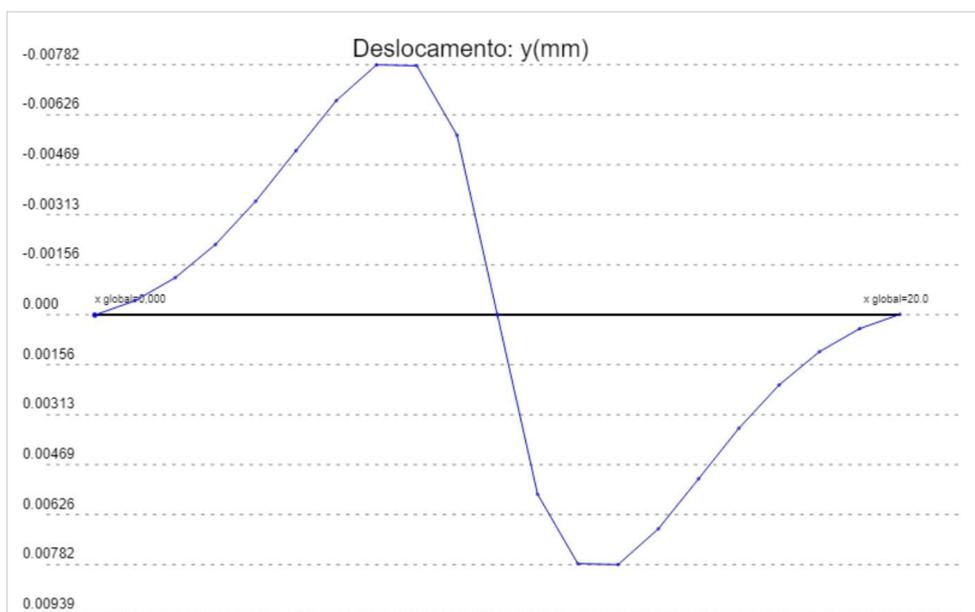
Fazendo a superposição dos efeitos de todos carregamentos temos:

x global	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.0000113	0.214	0.0681
1.000	-0.000437	0.280	0.0604
2.000	-0.00116	0.327	0.0295
3.000	-0.00220	0.327	-0.0366

Figura 21 - Relatório PDF do exemplo 01 - Continua

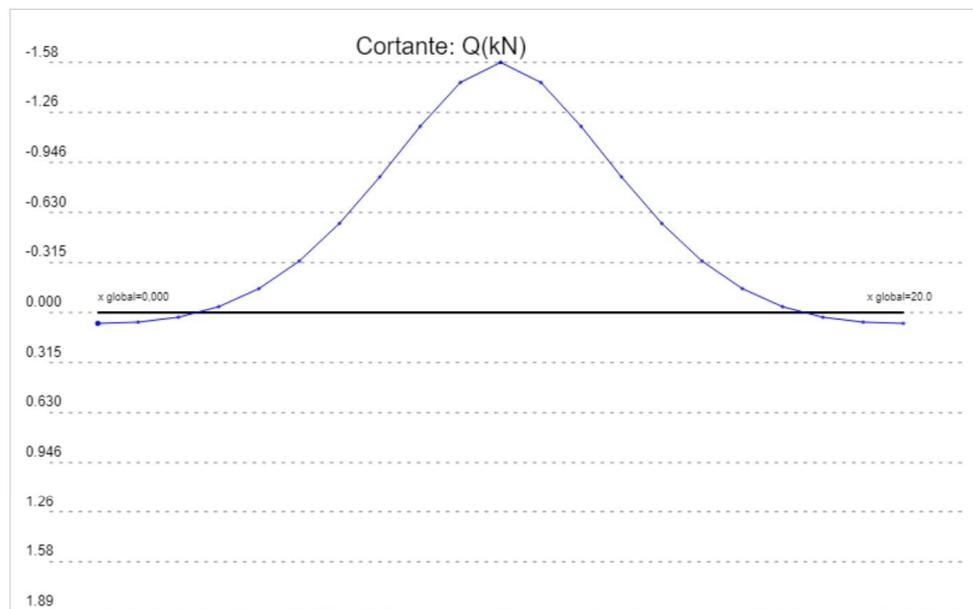
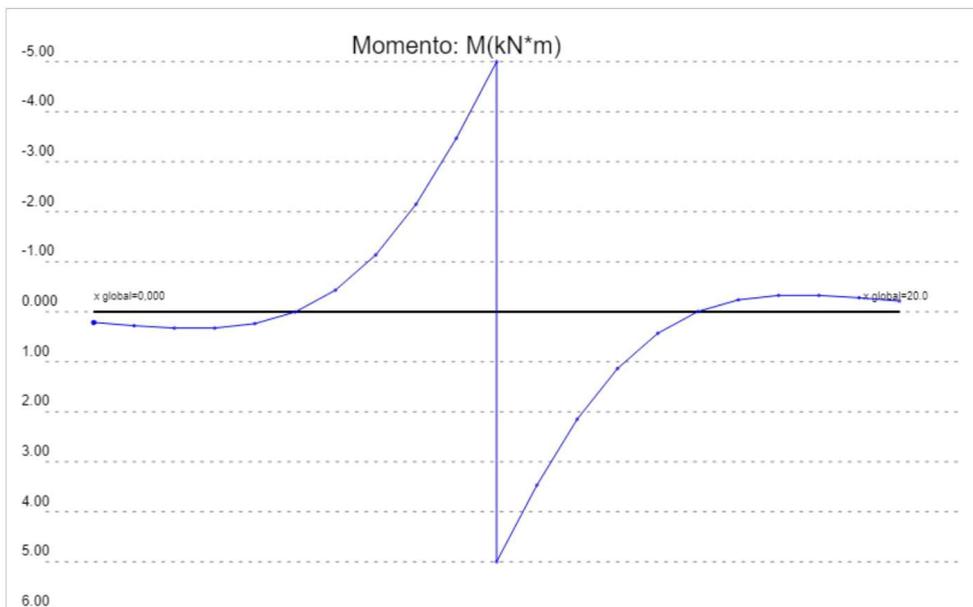
4.000	-0.00356	0.238	-0.151
5.000	-0.00514	0.00549	-0.324
6.000	-0.00670	-0.432	-0.562
7.000	-0.00782	-1.14	-0.855
8.000	-0.00780	-2.15	-1.17
9.000	-0.00562	-3.47	-1.45
10.000	0.00	-5.00	-1.58
10.000	0.00	5.00	-1.58
11.000	0.00562	3.47	-1.45
12.000	0.00780	2.15	-1.17
13.000	0.00782	1.14	-0.855
14.000	0.00670	0.432	-0.562
15.000	0.00514	-0.00549	-0.324
16.000	0.00356	-0.238	-0.151
17.000	0.00220	-0.327	-0.0366
18.000	0.00116	-0.327	0.0295
19.000	0.000437	-0.280	0.0604
20.000	-0.0000113	-0.214	0.0681

Abaixo seguem os diagramas:



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura 21 - Relatório PDF do exemplo 01 - Conclusão

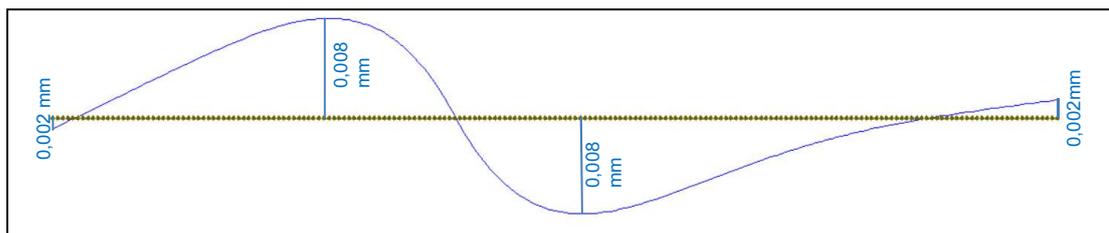


REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SUSSEKIND, J.C. Curso de Análise Estrutural – Deformações em estruturas e Método das forças. 4ª Edição. Porto Alegre. Globo, 1980. 310 páginas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

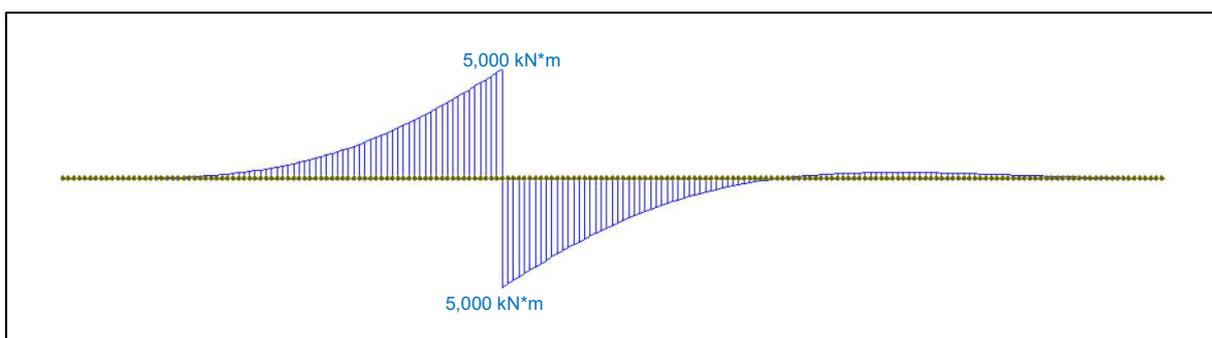
Figura 22 - Diagrama de deslocamento do exemplo 01 obtidos no Ftool (2017)



Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Percebe-se, na Figura 22, os nós atribuídos no Ftool (2017) a cada 10 cm. Além disso, comparando-se os resultados com a Figura 21 (IFESTRUT), nota-se que os valores são bem parecidos.

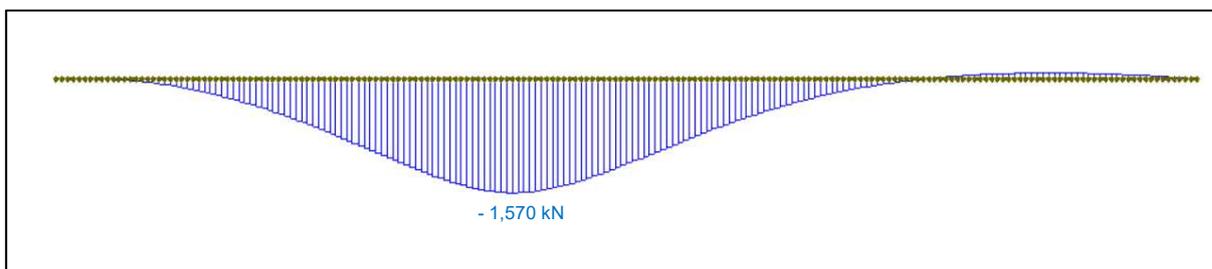
Figura 23 - Diagrama de momento fletor do exemplo 01 obtidos no Ftool (2017)



Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Comparando-se os resultados entre o Ftool (2017) e o IFESTRUT, nota-se que os valores são bem parecidos.

Figura 24 - Diagrama de cortante do exemplo 01 obtidos no Ftool (2017)



Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Comparando-se os resultados com entre o Ftool (2017) e o IFESTRUT, nota-se que os valores são bem parecidos.

3.4.2 Exemplo 02 - Viga semi-infinita com bordo livre à esquerda e carga pontual (Figuras 25 a 28)

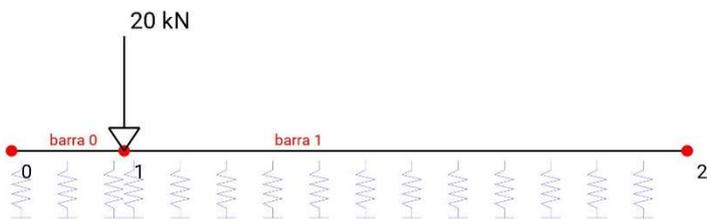
Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 - Continua



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Voluporanga

NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Cálculo de viga sobre base elástica
Data: 31/11/2017
Autor: Isabela Cassia Dominical Parra
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica Voluntária
Curso: Engenharia Civil

A viga a calcular é a seguinte:



barra 0
L = 2.000 m
E = 21.000 GPa
I = 0.048 m⁴
A = 1.000 m²

barra 1
L = 10.000 m
E = 21.000 GPa
I = 0.048 m⁴
A = 1.000 m²

Dados da Estrutura apresentada:

Coefficiente de Rigidez (k): 400kgf/cm² = 4.00e+4kN/m²
Módulo de Elasticidade (E): 21.0GPa=2.10e+7kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.0482m⁴
Comprimento da Viga (L): 12.0 m

Abaixo segue a resolução:

Parâmetro β:

$$\beta = (k/(4*E*I))^{1/4} = (4.00e+4/(4*2.10e+7*0.0482))^{1/4} = 0.31522 \text{ m}^{-1}$$

Quando $\beta*L < \pi/4$, a viga pode ser considerada infinitamente rígida, sem deformações e esforços por flexão, sendo a reação de apoio com o mesmo módulo, mas oposta ao carregamento, portanto não sendo válida a teoria de viga sobre base elástica.

$\beta*L = 3.7826 > \pi/4 = 0.7854$
Portanto, é necessário considerar os efeitos da base elástica.

Dependendo da influência da carga nas extremidades da viga, considera-se a mesma como infinita, semi-infinita ou finita, ou seja, se a carga está tão distante das extremidades direita e esquerda que não tem mais influência ali, a viga é considerada como infinita. Se a carga está muito longe de uma das bordas e perto da outra, a viga é considerada semi-infinita. E, finalmente, se a carga está perto das duas extremidades, a viga é considerada finita. Para este programa, caso a influência da carga provoque deslocamento, cortante e momento fletor nas extremidades com valores em módulo menores que 5% de

Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 - Continua

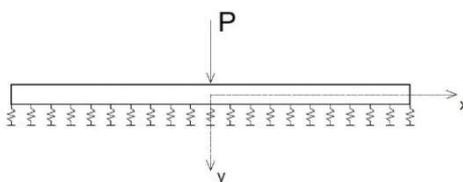
seus valores máximos em módulo, sugere-se ao usuário a classificação como infinita. Porém, o usuário tem a liberdade de classificá-la de outra maneira. Prevalece a escolha do usuário.

****Carga pontual P aplicada:**

Assim como é feito para os outros tipos de ação, a solução da viga começa pela resolução da mesma como se fosse uma viga infinita (funções a seguir). Após isso, caso ela não seja infinita, são realizados cálculos adicionais.

É necessário considerar a origem local, $x=0$, no ponto de aplicação da carga. Portanto, será utilizado uma coordenada global (x_g) e uma coordenada local (x) para cada seção da viga, para cada carga aplicada.

As funções abaixo (viga infinita) são aplicadas somente para x positivo. Analisando as funções auxiliares, conclui-se que os diagramas de deslocamento (y) e de momento fletor (M) possuem simetria em relação ao eixo y , portanto os valores dos pontos são iguais tanto para " x " negativo quanto para " x " positivo. Já o diagrama de esforço cortante (Q) é antissimétrico em relação ao eixo y , ou seja, os valores dos pontos com " x " negativo possuem sinais contrários aos dos pontos " x " positivos.



$$\varphi = e^{-\beta x} * (\cos(\beta x) + \text{sen}(\beta x)) \quad y = \frac{P * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta x)$$

$$\xi = e^{-\beta x} * \text{sen}(\beta x) \quad y' = -\frac{P * \beta^2}{k} * \xi(\beta x)$$

$$\psi = -e^{-\beta x} * (\text{sen}(\beta x) - \cos(\beta x)) \quad M = \frac{P}{4 * \beta} * \psi(\beta x)$$

$$\theta = e^{-\beta x} * \cos(\beta x) \quad Q = \frac{-P}{2} * \theta(\beta x)$$

Carga Pontual:

P = 20 kN no nó 1

Considerando viga infinita:

x global	x	$\varphi(\beta x)$	$\psi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	-2.00	0.744	0.116	0.430	0.0586	1.84	4.30
0.600	-1.40	0.856	0.307	0.582	0.0675	4.87	5.82
1.200	-0.800	0.946	0.559	0.753	0.0746	8.86	7.53
1.800	-0.200	0.996	0.878	0.937	0.0785	13.9	9.37
2.000	0.00	1.00	1.00	1.00	0.0788	15.9	10.0
2.000	0.00	1.00	1.00	1.00	0.0788	15.9	-10.0
2.400	0.400	0.985	0.764	0.875	0.0777	12.1	-8.75
3.000	1.00	0.920	0.467	0.694	0.0725	7.41	-6.94
3.600	1.60	0.821	0.237	0.529	0.0647	3.76	-5.29

Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 - Continua

4.200	2.20	0.704	0.0649	0.384	0.0555	1.03	-3.84
4.800	2.80	0.582	-0.0568	0.263	0.0459	-0.901	-2.63
5.400	3.40	0.465	-0.137	0.164	0.0366	-2.17	-1.64
6.000	4.00	0.356	-0.183	0.0864	0.0281	-2.91	-0.864
6.600	4.60	0.261	-0.205	0.0283	0.0206	-3.25	-0.283
7.200	5.20	0.180	-0.207	-0.0133	0.0142	-3.28	0.133
7.800	5.80	0.114	-0.196	-0.0409	0.00902	-3.11	0.409
8.400	6.40	0.0625	-0.177	-0.0574	0.00493	-2.81	0.574
9.000	7.00	0.0232	-0.154	-0.0654	0.00183	-2.44	0.654
9.600	7.60	-0.00509	-0.129	-0.0669	-0.000401	-2.04	0.669
10.200	8.20	-0.0242	-0.104	-0.0640	-0.00190	-1.65	0.640
10.800	8.80	-0.0358	-0.0807	-0.0582	-0.00282	-1.28	0.582
11.400	9.40	-0.0417	-0.0600	-0.0508	-0.00328	-0.952	0.508
12.000	10.0	-0.0432	-0.0423	-0.0428	-0.00341	-0.671	0.428

Classificação da Viga para o carregamento em questão: (todos valores estão sendo considerados em módulo)

Deslocamento Máximo: 0.0788 mm

Deslocamento no nó 0 = 0.0586 mm \geq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00394 mm

Deslocamento no nó 2 = 0.00341 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00394 mm

Momento Fletor Máximo: 15.9 kN*m

Momento Fletor no nó 0 = 1.84 kN*m \geq 5% do Momento Fletor Máximo = 0.793 kN*m

Momento Fletor no nó 2 = 0.671 kN*m \leq 5% do Momento Fletor Máximo = 0.793 kN*m

Cortante Máxima: 10.0 kN

Cortante no nó 0 = 4.3 kN \geq 5% da Cortante Máxima = 0.500 kN

Cortante no nó 2 = 0.428 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.500 kN

Portanto a classificação recomendada é: Viga Semi-Infinita, com bordo finito à esquerda

Escolha do Usuário: Viga Semi-Infinita, com bordo finito à esquerda

Como a viga para esse tipo de carregamento é semi-infinita, se fazem necessários cálculos adicionais.

Para proceder com os cálculos é preciso aplicar um P_0 e um M_{c0} , no ponto $x_g=0$, que sejam capazes de cancelar os efeitos provocados a esquerda desse ponto, tornando-se assim a viga infinita equivalente (já calculado anteriormente).

Ao final basta somar os efeitos da viga infinita equivalente, com os efeitos de P_0 e M_{c0} .

Para achar o valor de P_0 e M_{c0} de uma viga semi-infinita com bordo livre a esquerda, é preciso resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{P_0}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{M_{c0}}{2} * \theta(0) = -M_A \\ -\frac{P_0}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c0} * \beta}{2} * \varphi(0) = -Q_A \end{cases}$$

Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 - Continua

Sendo:

M_A : Momento Fletor no ponto $xg=0$

Q_A : Cortante no ponto $xg=0$

Sistema a ser resolvido:

0.793	0.500	P0	-1.84
-0.500	-0.158	Mc0	-4.30

Este sistema pode ser resolvido, por exemplo, por Gauss, que pode ser estudado em <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>. Para tanto, utilize o arquivo txt (sistema 0) gerado juntamente com este relatório, que pode ser lido pelo referido programa.

Resolvendo o sistema acima, encontram-se os seguintes valores:

$P0 = 19.5$

$Mc0 = -34.7$

Carga Pontual:

$P0 = 19.5$ kN no nó 0

x global	x	$\varphi(\beta x)$	$\psi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.00	1.00	1.00	1.00	0.0769	15.5	-9.76
0.600	0.600	0.969	0.657	0.813	0.0745	10.2	-7.94
1.200	1.20	0.890	0.384	0.637	0.0684	5.94	-6.21
1.800	1.80	0.783	0.173	0.478	0.0602	2.69	-4.67
2.000	2.00	0.744	0.116	0.430	0.0572	1.80	-4.20
2.000	2.00	0.744	0.116	0.430	0.0572	1.80	-4.20
2.400	2.40	0.663	0.0192	0.341	0.0510	0.297	-3.33
3.000	3.00	0.542	-0.0877	0.227	0.0417	-1.36	-2.22
3.600	3.60	0.427	-0.156	0.136	0.0329	-2.41	-1.33
4.200	4.20	0.323	-0.193	0.0650	0.0249	-2.99	-0.635
4.800	4.80	0.233	-0.207	0.0127	0.0179	-3.21	-0.124
5.400	5.40	0.157	-0.205	-0.0239	0.0121	-3.17	0.233
6.000	6.00	0.0957	-0.191	-0.0475	0.00736	-2.95	0.464
6.600	6.60	0.0481	-0.170	-0.0609	0.00370	-2.63	0.595
7.200	7.20	0.0126	-0.146	-0.0665	0.000973	-2.25	0.649
7.800	7.80	-0.0124	-0.120	-0.0664	-0.000953	-1.86	0.648
8.400	8.40	-0.0288	-0.0959	-0.0623	-0.00222	-1.49	0.609
9.000	9.00	-0.0383	-0.0735	-0.0559	-0.00295	-1.14	0.546
9.600	9.60	-0.0426	-0.0538	-0.0482	-0.00328	-0.833	0.470
10.200	10.2	-0.0430	-0.0371	-0.0400	-0.00331	-0.574	0.391

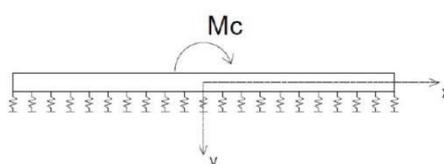
Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 - Continua

10.800	10.8	-0.0407	-0.0235	-0.0321	-0.00313	-0.363	0.313
11.400	11.4	-0.0368	-0.0127	-0.0247	-0.00283	-0.197	0.242
12.000	12.0	-0.0319	-0.00463	-0.0182	-0.00245	-0.0717	0.178

**Com momento aplicado:

É necessário considerar a origem local, $x=0$, no ponto de aplicação do momento. Portanto, será utilizado uma coordenada global (x_g), e uma coordenada local (x) para cada seção da viga, para cada momento aplicado.

As funções abaixo (viga infinita) são aplicadas somente para x positivo. Analisando as funções auxiliares, conclui-se que os diagramas de deslocamento (y) e de esforço cortante (Q) possuem simetria em relação ao eixo y , portanto os valores dos pontos são iguais tanto para " x " negativo quanto para " x " positivo. Já o diagrama de momento fletor (M) é antissimétrico em relação ao eixo y , ou seja, os valores dos pontos com " x " negativo possuem sinais contrários aos dos pontos " x " positivos.



$$\xi = e^{-\beta x} * \text{sen}(\beta x)$$

$$y = \frac{Mc * \beta^2}{k} * \xi(\beta x)$$

$$\psi = -e^{-\beta x} * (\text{sen}(\beta x) - \text{cos}(\beta x))$$

$$y' = \frac{Mc * \beta^3}{k} * \psi(\beta x)$$

$$\theta = e^{-\beta x} * \text{cos}(\beta x)$$

$$M = \frac{Mc}{2} * \theta(\beta x)$$

$$\varphi = e^{-\beta x} * (\text{cos}(\beta x) + \text{sen}(\beta x))$$

$$Q = \frac{-Mc * \beta}{2} * \varphi(\beta x)$$

Momento Aplicado:

$Mc_0 = -34.7 \text{ kN*m}$ no nó 0

x global	x	$\xi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	$\varphi(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	-17.3	5.46
0.600	0.600	0.156	0.813	0.969	-0.0134	-14.1	5.29
1.200	1.20	0.253	0.637	0.890	-0.0218	-11.0	4.86
1.800	1.80	0.305	0.478	0.783	-0.0262	-8.29	4.28
2.000	2.00	0.314	0.430	0.744	-0.0270	-7.45	4.06
2.000	2.00	0.314	0.430	0.744	-0.0270	-7.45	4.06
2.400	2.40	0.322	0.341	0.663	-0.0277	-5.91	3.62
3.000	3.00	0.315	0.227	0.542	-0.0271	-3.94	2.96
3.600	3.60	0.291	0.136	0.427	-0.0251	-2.35	2.33

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 - Continua

4.200	4.20	0.258	0.0650	0.323	-0.0222	-1.13	1.76
4.800	4.80	0.220	0.0127	0.233	-0.0189	-0.220	1.27
5.400	5.40	0.181	-0.0239	0.157	-0.0156	0.414	0.857
6.000	6.00	0.143	-0.0475	0.0957	-0.0123	0.824	0.522
6.600	6.60	0.109	-0.0609	0.0481	-0.00938	1.06	0.263
7.200	7.20	0.0791	-0.0665	0.0126	-0.00681	1.15	0.0691
7.800	7.80	0.0540	-0.0664	-0.0124	-0.00465	1.15	-0.0676
8.400	8.40	0.0336	-0.0623	-0.0288	-0.00289	1.08	-0.157
9.000	9.00	0.0176	-0.0559	-0.0383	-0.00151	0.969	-0.209
9.600	9.60	0.00559	-0.0482	-0.0426	-0.000481	0.835	-0.233
10.200	10.2	-0.00295	-0.0400	-0.0430	0.000254	0.694	-0.235
10.800	10.8	-0.00863	-0.0321	-0.0407	0.000743	0.556	-0.222
11.400	11.4	-0.0120	-0.0247	-0.0368	0.00103	0.429	-0.201
12.000	12.0	-0.0136	-0.0182	-0.0319	0.00117	0.316	-0.174

Fazendo a superposição dos efeitos de todos carregamentos temos:

x global	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.136	3.55e-15	-8.88e-16
0.600	0.129	0.959	3.17
1.200	0.121	3.77	6.17
1.800	0.113	8.32	8.98
2.000	0.109	10.2	9.86
2.000	0.109	10.2	-10.1
2.400	0.101	6.50	-8.45
3.000	0.0871	2.12	-6.19
3.600	0.0724	-1.01	-4.28
4.200	0.0581	-3.09	-2.71
4.800	0.0449	-4.33	-1.48
5.400	0.0331	-4.92	-0.549
6.000	0.0231	-5.04	0.122
6.600	0.0149	-4.82	0.575
7.200	0.00838	-4.39	0.851
7.800	0.00342	-3.83	0.989
8.400	-0.000178	-3.22	1.03
9.000	-0.00263	-2.61	0.990
9.600	-0.00416	-2.04	0.907

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 - Continua

10.200	-0.00496	-1.53	0.796
10.800	-0.00521	-1.09	0.673
11.400	-0.00508	-0.720	0.549
12.000	-0.00468	-0.427	0.432

Abaixo seguem os diagramas:

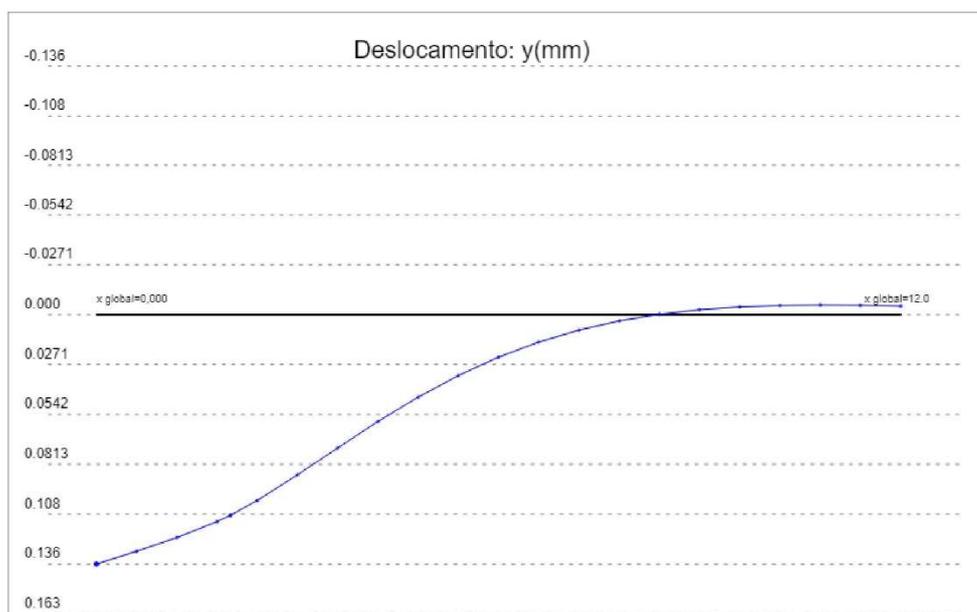
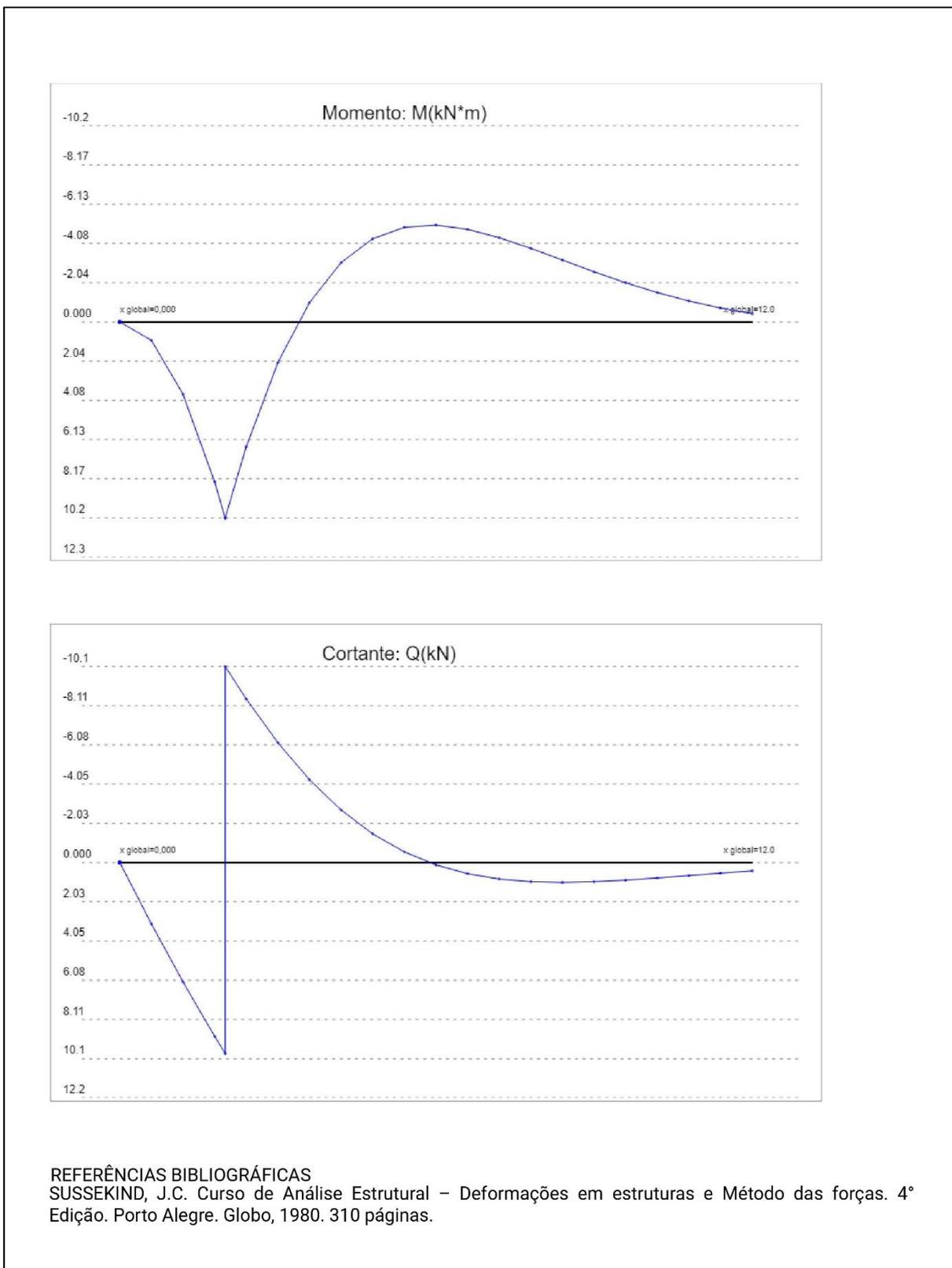
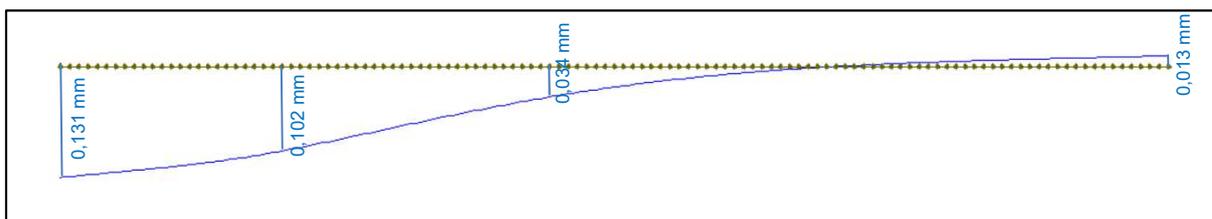


Figura 25 - Relatório PDF do exemplo 02 – Conclusão



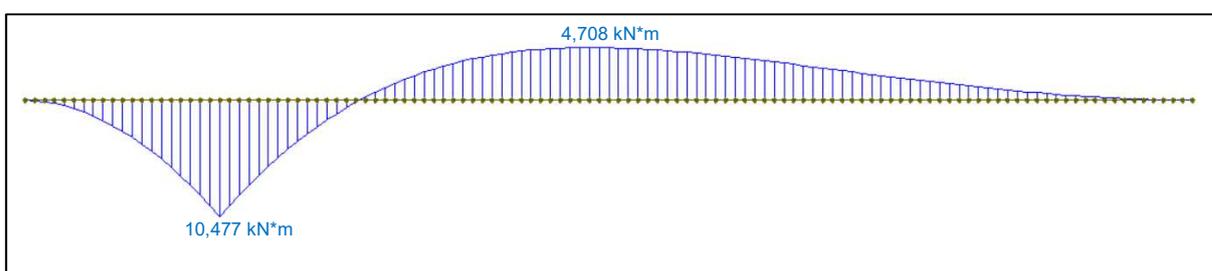
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura 26 - Diagrama de deslocamento do exemplo 02 obtidos no Ftool (2017)



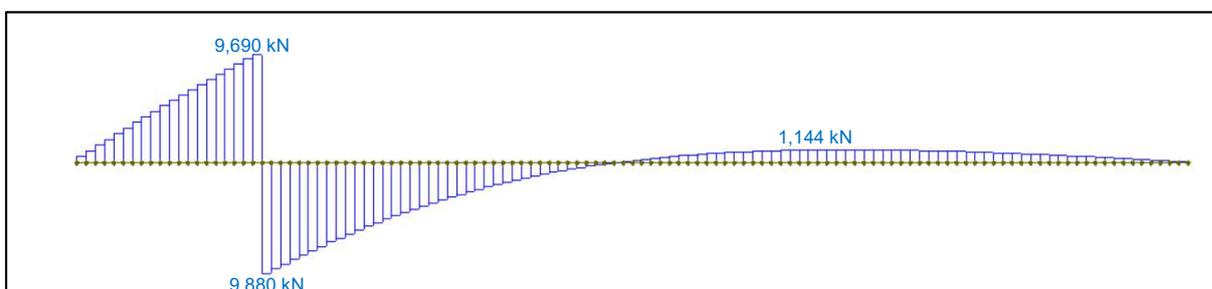
Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Figura 27 - Diagrama de momento fletor do exemplo 02 obtidos no Ftool (2017)



Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Figura 28 - Diagrama de cortante do exemplo 02 obtidos no Ftool (2017)



Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Como se pode observar nas Figuras 26 a 28, os valores dos diagramas pelos dois programas são próximos, validando assim os resultados do IFESTRUT.

3.4.3 Exemplo 03 - Viga finita com bordos apoiados e carga distribuída (Figura 29 a 32)

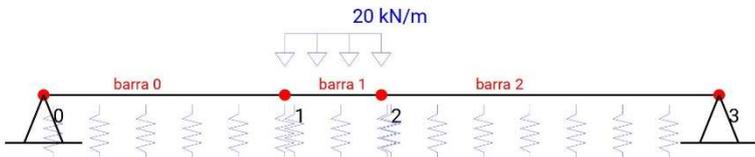
Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua



**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
SÃO PAULO
Campus Votuporanga

NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Cálculo de viga sobre base elástica
Data: 31/11/2017
Autor: Isabela Cassia Dominical Parra
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica Voluntária
Curso: Engenharia Civil

A viga a calcular é a seguinte:



barra 0
L = 5.000 m
E = 21.000 GPa
I = 0.048 m⁴
A = 1.000 m²

barra 1
L = 2.000 m
E = 21.000 GPa
I = 0.048 m⁴
A = 1.000 m²

barra 2
L = 7.000 m
E = 21.000 GPa
I = 0.048 m⁴
A = 1.000 m²

k = 400 kgf/cm² k = 400 kgf/cm² k = 400 kgf/cm²

Dados da Estrutura apresentada:

Coefficiente de Rigidez (k): 400kgf/cm²= 4.00e+4kN/m²
Módulo de Elasticidade (E): 21.0GPa=2.10e+7kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.0482m⁴
Comprimento da Viga (L): 14.0 m

Abaixo segue a resolução:

Parâmetro β:

$$\beta = (k/(4*E*I))^{1/4} = (4.00e+4/(4*2.10e+7*0.0482))^{1/4} = 0.31522 \text{ m}^{-1}$$

Quando $\beta*L < \pi/4$, a viga pode ser considerada infinitamente rígida, sem deformações e esforços por flexão, sendo a reação de apoio com o mesmo módulo, mas oposta ao carregamento, portanto não sendo válida a teoria de viga sobre base elástica.

$\beta*L = 4.4131 > \pi/4 = 0.7854$
Portanto, é necessário considerar os efeitos da base elástica.

Dependendo da influência da carga nas extremidades da viga, considera-se a mesma como infinita, semi-infinita ou finita, ou seja, se a carga está tão distante das extremidades direita e esquerda que não tem

1 de 12

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua

mais influência ali, a viga é considerada como infinita. Se a carga está muito longe de uma das bordas e perto da outra, a viga é considerada semi- infinita. E, finalmente, se a carga está perto das duas extremidades, a viga é considerada finita. Para este programa, caso a influência da carga provoque deslocamento, cortante e momento fletor nas extremidades com valores em módulo menores que 5% de seus valores máximos em módulo, sugere-se ao usuário a classificação como infinita. Porém, o usuário tem a liberdade de classificá-la de outra maneira. Prevalece a escolha do usuário.

****Com carga uniformemente distribuída:**

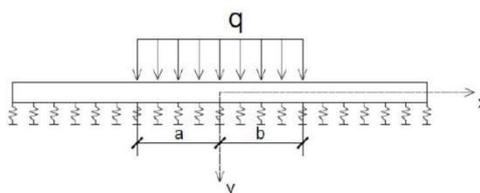
Assim como é feito para os outros tipos de ação, a solução da viga começa pela resolução da mesma como se fosse uma viga infinita (funções a seguir). Após isso, caso ela não seja infinita, são realizados cálculos adicionais.

Quando a viga possui como carregamento carga uniformemente distribuída (q) é preciso considerar seus efeitos de duas maneiras distintas. Existe uma formulação para os pontos internos à área de aplicação da carga e outra para os pontos externos à área de atuação da carga. Ao final, devem-se considerar os pontos em um único diagrama.

Diferentemente das formulações para carga pontual (P) e momento aplicado (M_c), neste tipo de carregamento não se utiliza a variável " x ", mas sim uma variável " a ", que é a distância do ponto analisado até o início de aplicação da carga distribuída, e uma variável " b ", que é a distância do ponto analisado ao fim de aplicação da carga distribuída, da esquerda para a direita da viga, como pode ser visto na figura abaixo.

As funções abaixo (viga infinita) são aplicadas para x à esquerda da carga uniformemente distribuída, ou para x dentro da área da carga uniformemente distribuída. Para o x à direita, é necessário, uma análise das funções auxiliares, apresentadas na primeira coluna abaixo. Analisando-se as funções auxiliares, os pontos à direita da região de aplicação da carga distribuída possuem simetria em relação ao eixo y com os pontos à esquerda para os diagramas de deslocamento (y) e de momento fletor (M). Portanto, os valores dos pontos à direita da região de aplicação da carga distribuída são iguais aos valores à esquerda da região de aplicação da carga distribuída. Já o diagrama de esforço cortante (Q) é antissimétrico em relação ao eixo y , ou seja, os valores dos pontos à esquerda da região de aplicação da carga distribuída possuem sinal contrário aos dos pontos à direita da região de aplicação da carga distribuída.

Equação para os pontos internos da região de atuação da carga:



$$\theta = e^{-\beta x} * \cos(\beta x) \qquad y = \frac{q}{2 * k} * [2 - \theta(\beta a) - \theta(\beta b)]$$

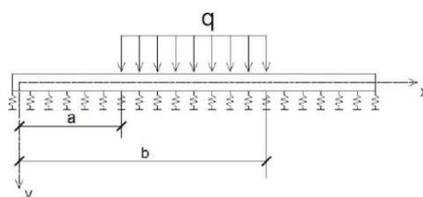
$$\varphi = e^{-\beta x} * (\cos(\beta x) + \sin(\beta x)) \qquad y' = \frac{q * \beta}{2 * k} * [\varphi(\beta a) - \varphi(\beta b)]$$

$$\xi = e^{-\beta x} * \sin(\beta x) \qquad M = \frac{q}{4 * \beta^2} * [\xi(\beta a) + \xi(\beta b)]$$

$$\psi = -e^{-\beta x} * (\sin(\beta x) - \cos(\beta x)) \qquad Q = \frac{q}{4 * \beta} * [\psi(\beta a) - \psi(\beta b)]$$

Equação para os pontos externos a região de atuação da carga:

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua



$$\theta = e^{-\beta x} * \cos(\beta x) \quad y = \frac{q}{2 * k} * [\theta(\beta a) - \theta(\beta b)]$$

$$\varphi = e^{-\beta x} * (\cos(\beta x) + \text{sen}(\beta x)) \quad y' = \frac{q * \beta}{2 * k} * [\varphi(\beta a) - \varphi(\beta b)]$$

$$\xi = e^{-\beta x} * \text{sen}(\beta x) \quad M = \frac{-q}{4 * \beta^2} * [\xi(\beta a) - \xi(\beta b)]$$

$$\psi = -e^{-\beta x} * (\text{sen}(\beta x) - \cos(\beta x)) \quad Q = \frac{q}{4 * \beta} * [\psi(\beta a) - \psi(\beta b)]$$

Carga uniformemente distribuida:

q= 20 kN/m- na barra [1,2]

Considerando viga infinita:

x global	a	b	$\theta(\beta a)$	$\theta(\beta b)$	$\xi(\beta a)$	$\xi(\beta b)$	$\psi(\beta a)$	$\psi(\beta b)$	y(mm)	M (kN*m)	Q(kN)
0.000	5.00	7.00	-0.001 10	-0.065 4	0.207	0.0886	-0.208	-0.154	0.0161	-5.95	-0.856
0.700	4.30	6.30	0.0551	-0.055 4	0.252	0.126	-0.197	-0.181	0.0276	-6.35	-0.251
1.400	3.60	5.60	0.136	-0.033 1	0.291	0.168	-0.156	-0.201	0.0422	-6.21	0.719
2.100	2.90	4.90	0.245	0.0055 9	0.317	0.213	-0.072 8	-0.208	0.0598	-5.24	2.14
2.800	2.20	4.20	0.384	0.0650	0.320	0.258	0.0649	-0.193	0.0798	-3.09	4.09
3.500	1.50	3.50	0.555	0.150	0.284	0.296	0.271	-0.147	0.101	0.622	6.63
4.200	0.800	2.80	0.753	0.263	0.194	0.320	0.559	-0.056 8	0.122	6.32	9.76
4.900	0.100	2.10	0.968	0.407	0.0305	0.317	0.938	0.0898	0.140	14.4	13.5
5.000	0.00	2.00	1.00	0.430	0.00	0.314	1.00	0.116	0.142	15.8	14.0
5.000	0.00	2.00	1.00	0.430	0.00	0.314	1.00	0.116	0.142	15.8	14.0
5.600	0.600	1.40	0.813	0.582	0.156	0.275	0.657	0.307	0.151	21.7	5.56
6.300	1.30	0.700	0.609	0.783	0.264	0.176	0.344	0.607	0.152	22.1	-4.17
7.000	2.00	0.00	0.430	1.00	0.314	0.00	0.116	1.00	0.142	15.8	-14.0
7.000	0.00	2.00	1.00	0.430	0.00	0.314	1.00	0.116	0.142	15.8	-14.0

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua

7.700	0.700	2.70	0.783	0.281	0.176	0.321	0.607	-0.039 6	0.125	7.32	-10.3
8.400	1.40	3.40	0.582	0.164	0.275	0.301	0.307	-0.137	0.104	1.30	-7.04
9.100	2.10	4.10	0.407	0.0755	0.317	0.264	0.0898	-0.189	0.0829	-2.67	-4.42
9.800	2.80	4.80	0.263	0.0127	0.320	0.220	-0.056 8	-0.207	0.0625	-5.02	-2.39
10.500	3.50	5.50	0.150	-0.028 6	0.296	0.174	-0.147	-0.203	0.0445	-6.13	-0.893
11.200	4.20	6.20	0.0650	-0.053 0	0.258	0.131	-0.193	-0.184	0.0295	-6.37	0.137
11.900	4.90	6.90	0.0055 9	-0.064 5	0.213	0.0935	-0.208	-0.158	0.0175	-6.03	0.788
12.600	5.60	7.60	-0.033 1	-0.066 9	0.168	0.0618	-0.201	-0.129	0.0084 6	-5.34	1.15
13.300	6.30	8.30	-0.055 4	-0.063 2	0.126	0.0366	-0.181	-0.099 9	0.0019 7	-4.48	1.29
14.000	7.00	9.00	-0.065 4	-0.055 9	0.0886	0.0176	-0.154	-0.073 5	-0.002 36	-3.57	1.28

Classificação da Viga para o carregamento em questão: (todos valores estão sendo considerados em módulo)

Deslocamento Máximo: 0.152 mm

Deslocamento no nó 0 = 0.0161 mm \geq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00761 mm

Deslocamento no nó 3 = 0.00236 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00761 mm

Momento Fletor Máximo: 22.1 kN*m

Momento Fletor no nó 0 = 5.95 kN*m \geq 5% do Momento Fletor Máximo = 1.11 kN*m

Momento Fletor no nó 3 = 3.57 kN*m \geq 5% do Momento Fletor Máximo = 1.11 kN*m

Cortante Máxima: 14.0 kN

Cortante no nó 0 = 0.856 kN \geq 5% da Cortante Máxima = 0.701 kN

Cortante no nó 3 = 1.28 kN \geq 5% da Cortante Máxima = 0.701 kN

Portanto a classificação recomendada é: Viga Finita

Escolha do Usuário: Viga Finita

Como a viga para esse tipo de carregamento é finita, se fazem necessários cálculos adicionais.

Para proceder com os cálculos é preciso aplicar um P0A e um Mc0A, no ponto $x_g=0$, e um P0B e um Mc0B, no ponto $x_g=14$, que sejam capazes de cancelar os efeitos provocados a esquerda do ponto $x_g=0$ e a direita de $x_g=14$, tornando-se assim a viga infinita equivalente (já calculado anteriormente).

Ao final basta somar os efeitos da viga infinita equivalente, com os efeitos de P0A, Mc0A, P0B e Mc0B.

Para achar o valor de P0A, P0B, Mc0A e Mc0B de uma viga finita com bordos apoiados, é preciso resolver o sistema abaixo:

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua

$$\begin{cases} \frac{P_{0A} * \beta}{2 * K} * \varphi(0) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * K} * \varphi(\beta l) + \frac{M_{c0A} * \beta^2}{K} * \xi(0) - \frac{M_{c0B} * \beta^2}{K} * \xi(\beta l) = -y_A \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{M_{c0A}}{2} * \theta(0) - \frac{M_{c0B}}{2} * \theta(\beta l) = -M_A \\ \frac{P_{0A} * \beta}{2 * K} * \varphi(\beta l) + \frac{P_{0B} * \beta}{2 * K} * \varphi(0) + \frac{M_{c0A} * \beta^2}{K} * \xi(\beta l) - \frac{M_{c0B} * \beta^2}{K} * \xi(0) = -y_B \\ \frac{P_{0A}}{4 * \beta} * \psi(\beta l) + \frac{P_{0B}}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{M_{c0A}}{2} * \theta(\beta l) - \frac{M_{c0B}}{2} * \theta(0) = -M_B \end{cases}$$

Sendo:

y_A : Deslocamento no ponto $xg=0$

M_A : Momento Fletor no ponto $xg=0$

y_B : Deslocamento no ponto $xg=14$

M_B : Momento Fletor no ponto $xg=14$

Sistema a ser resolvido:

0.00000394	-5.97e-8	0.00	2.88e-8	P0A	-0.0000161
0.793	0.00635	0.500	0.00179	P0B	5.95
-5.97e-8	0.00000394	-2.88e-8	0.00	Mc0A	0.00000236
0.00635	0.793	-0.00179	-0.500	Mc0B	3.57

Este sistema pode ser resolvido, por exemplo, por Gauss, que pode ser estudado em <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>. Para tanto, utilize o arquivo txt (sistema 0) gerado juntamente com este relatório, que pode ser lido pelo referido programa.

Resolvendo o sistema acima, encontram-se os seguintes valores:

P0A = -4.02

P0B = 0.673

Mc0A = 18.3

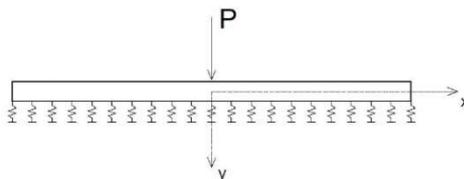
Mc0B = -6.19

**Carga pontual P aplicada:

É necessário considerar a origem local, $x=0$, no ponto de aplicação da carga. Portanto, será utilizado uma coordenada global (xg) e uma coordenada local (x) para cada seção da viga, para cada carga aplicada.

As funções abaixo (viga infinita) são aplicadas somente para x positivo. Analisando as funções auxiliares, conclui-se que os diagramas de deslocamento (y) e de momento fletor (M) possuem simetria em relação ao eixo y , portanto os valores dos pontos são iguais tanto para " x " negativo quanto para " x " positivo. Já o diagrama de esforço cortante (Q) é antissimétrico em relação ao eixo y , ou seja, os valores dos pontos com " x " negativo possuem sinais contrários aos dos pontos " x " positivos.

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua



$$\begin{aligned} \varphi &= e^{-\beta x} * (\cos(\beta x) + \text{sen}(\beta x)) & y &= \frac{P * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta x) \\ \xi &= e^{-\beta x} * \text{sen}(\beta x) & y' &= -\frac{P * \beta^2}{k} * \xi(\beta x) \\ \psi &= -e^{-\beta x} * (\text{sen}(\beta x) - \cos(\beta x)) & M &= \frac{P}{4 * \beta} * \psi(\beta x) \\ \theta &= e^{-\beta x} * \cos(\beta x) & Q &= \frac{-P}{2} * \theta(\beta x) \end{aligned}$$

Carga Pontual:

P0A = -4.02 kN no nó 0

x global	x	$\varphi(\beta x)$	$\psi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.00	1.00	1.00	1.00	-0.0158	-3.19	2.01
0.700	0.700	0.958	0.607	0.783	-0.0152	-1.94	1.57
1.400	1.40	0.856	0.307	0.582	-0.0136	-0.979	1.17
2.100	2.10	0.724	0.0898	0.407	-0.0115	-0.287	0.818
2.800	2.80	0.582	-0.0568	0.263	-0.00923	0.181	0.528
3.500	3.50	0.446	-0.147	0.150	-0.00706	0.468	0.301
4.200	4.20	0.323	-0.193	0.0650	-0.00512	0.616	0.131
4.900	4.90	0.219	-0.208	0.00559	-0.00347	0.663	0.0112
5.000	5.00	0.206	-0.208	-0.00110	-0.00326	0.663	-0.00221
5.000	5.00	0.206	-0.208	-0.00110	-0.00326	0.663	-0.00221
5.600	5.60	0.135	-0.201	-0.0331	-0.00214	0.641	-0.0665
6.300	6.30	0.0702	-0.181	-0.0554	-0.00111	0.577	-0.111
7.000	7.00	0.0232	-0.154	-0.0654	-0.000368	0.491	-0.131
7.000	7.00	0.0232	-0.154	-0.0654	-0.000368	0.491	-0.131
7.700	7.70	-0.00886	-0.125	-0.0667	0.000140	0.397	-0.134
8.400	8.40	-0.0288	-0.0959	-0.0623	0.000456	0.306	-0.125
9.100	9.10	-0.0394	-0.0700	-0.0547	0.000624	0.223	-0.110
9.800	9.80	-0.0431	-0.0479	-0.0455	0.000683	0.153	-0.0915
10.500	10.5	-0.0421	-0.0299	-0.0360	0.000668	0.0954	-0.0724

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua

11.200	11.2	-0.0382	-0.0160	-0.0271	0.000606	0.0510	-0.0545
11.900	11.9	-0.0327	-0.00581	-0.0193	0.000518	0.0185	-0.0387
12.600	12.6	-0.0266	0.00119	-0.0127	0.000422	-0.00381	-0.0256
13.300	13.3	-0.0206	0.00561	-0.00751	0.000327	-0.0179	-0.0151
14.000	14.0	-0.0152	0.00801	-0.00357	0.000240	-0.0255	-0.00718

Carga Pontual:

POB = 0.673 kN no nó 3

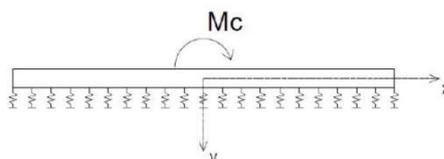
x global	x	$\varphi(\beta x)$	$\psi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	-14.0	-0.0152	0.00801	-0.00357	-0.0000402	0.00427	-0.00120
0.700	-13.3	-0.0206	0.00561	-0.00751	-0.0000547	0.00299	-0.00253
1.400	-12.6	-0.0266	0.00119	-0.0127	-0.0000706	0.000637	-0.00428
2.100	-11.9	-0.0327	-0.00581	-0.0193	-0.0000867	-0.00310	-0.00648
2.800	-11.2	-0.0382	-0.0160	-0.0271	-0.000101	-0.00854	-0.00912
3.500	-10.5	-0.0421	-0.0299	-0.0360	-0.000112	-0.0159	-0.0121
4.200	-9.80	-0.0431	-0.0479	-0.0455	-0.000114	-0.0255	-0.0153
4.900	-9.10	-0.0394	-0.0700	-0.0547	-0.000104	-0.0373	-0.0184
5.000	-9.00	-0.0383	-0.0735	-0.0559	-0.000102	-0.0392	-0.0188
5.000	-9.00	-0.0383	-0.0735	-0.0559	-0.000102	-0.0392	-0.0188
5.600	-8.40	-0.0288	-0.0959	-0.0623	-0.0000763	-0.0512	-0.0210
6.300	-7.70	-0.00886	-0.125	-0.0667	-0.0000235	-0.0664	-0.0224
7.000	-7.00	0.0232	-0.154	-0.0654	0.0000615	-0.0821	-0.0220
7.000	-7.00	0.0232	-0.154	-0.0654	0.0000615	-0.0821	-0.0220
7.700	-6.30	0.0702	-0.181	-0.0554	0.000186	-0.0965	-0.0186
8.400	-5.60	0.135	-0.201	-0.0331	0.000357	-0.107	-0.0111
9.100	-4.90	0.219	-0.208	0.00559	0.000580	-0.111	0.00188
9.800	-4.20	0.323	-0.193	0.0650	0.000856	-0.103	0.0219
10.500	-3.50	0.446	-0.147	0.150	0.00118	-0.0782	0.0503
11.200	-2.80	0.582	-0.0568	0.263	0.00154	-0.0303	0.0884
11.900	-2.10	0.724	0.0898	0.407	0.00192	0.0479	0.137
12.600	-1.40	0.856	0.307	0.582	0.00227	0.164	0.196
13.300	-0.700	0.958	0.607	0.783	0.00254	0.324	0.263
14.000	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00265	0.534	0.336

**Com momento aplicado:

É necessário considerar a origem local, $x=0$, no ponto de aplicação do momento. Portanto, será utilizado uma coordenada global (x_g), e uma coordenada local (x) para cada seção da viga, para cada momento aplicado.

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua

As funções abaixo (viga infinita) são aplicadas somente para x positivo. Analisando as funções auxiliares, conclui-se que os diagramas de deslocamento (y) e de esforço cortante (Q) possuem simetria em relação ao eixo y, portanto os valores dos pontos são iguais tanto para "x" negativo quanto para "x" positivo. Já o diagrama de momento fletor(M) é antissimétrico em relação ao eixo y, ou seja, os valores dos pontos com "x" negativo possuem sinais contrários aos dos pontos "x" positivos.



$$\xi = e^{-\beta x} * \text{sen}(\beta x)$$

$$y = \frac{Mc * \beta^2}{k} * \xi(\beta x)$$

$$\psi = -e^{-\beta x} * (\text{sen}(\beta x) - \text{cos}(\beta x))$$

$$y' = \frac{Mc * \beta^3}{k} * \psi(\beta x)$$

$$\theta = e^{-\beta x} * \text{cos}(\beta x)$$

$$M = \frac{Mc}{2} * \theta(\beta x)$$

$$\varphi = e^{-\beta x} * (\text{cos}(\beta x) + \text{sen}(\beta x))$$

$$Q = \frac{-Mc * \beta}{2} * \varphi(\beta x)$$

Momento Aplicado:

Mc0A = 18.3 kN no nó 0

x global	x	$\xi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	$\varphi(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	9.14	-2.88
0.700	0.700	0.176	0.783	0.958	0.00797	7.16	-2.76
1.400	1.40	0.275	0.582	0.856	0.0125	5.32	-2.47
2.100	2.10	0.317	0.407	0.724	0.0144	3.72	-2.09
2.800	2.80	0.320	0.263	0.582	0.0145	2.40	-1.68
3.500	3.50	0.296	0.150	0.446	0.0135	1.37	-1.28
4.200	4.20	0.258	0.0650	0.323	0.0117	0.595	-0.931
4.900	4.90	0.213	0.00559	0.219	0.00969	0.0511	-0.631
5.000	5.00	0.207	-0.00110	0.206	0.00939	-0.0100	-0.593
5.000	5.00	0.207	-0.00110	0.206	0.00939	-0.0100	-0.593
5.600	5.60	0.168	-0.0331	0.135	0.00763	-0.302	-0.389
6.300	6.30	0.126	-0.0554	0.0702	0.00571	-0.506	-0.202
7.000	7.00	0.0886	-0.0654	0.0232	0.00402	-0.598	-0.0669
7.000	7.00	0.0886	-0.0654	0.0232	0.00402	-0.598	-0.0669
7.700	7.70	0.0578	-0.0667	-0.00886	0.00263	-0.610	0.0255
8.400	8.40	0.0336	-0.0623	-0.0288	0.00152	-0.570	0.0830

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua

9.100	9.10	0.0153	-0.0547	-0.0394	0.000696	-0.500	0.113
9.800	9.80	0.00239	-0.0455	-0.0431	0.000108	-0.416	0.124
10.500	10.5	-0.00612	-0.0360	-0.0421	-0.000278	-0.329	0.121
11.200	11.2	-0.0111	-0.0271	-0.0382	-0.000505	-0.248	0.110
11.900	11.9	-0.0134	-0.0193	-0.0327	-0.000611	-0.176	0.0943
12.600	12.6	-0.0139	-0.0127	-0.0266	-0.000632	-0.116	0.0767
13.300	13.3	-0.0131	-0.00751	-0.0206	-0.000596	-0.0686	0.0594
14.000	14.0	-0.0116	-0.00357	-0.0152	-0.000526	-0.0327	0.0437

Momento Aplicado:

Mc0B = -6.19 kN no nó 3

x global	x	$\xi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	$\varphi(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	-14.0	-0.0116	-0.00357	-0.0152	-0.000178	-0.0111	-0.0148
0.700	-13.3	-0.0131	-0.00751	-0.0206	-0.000202	-0.0233	-0.0201
1.400	-12.6	-0.0139	-0.0127	-0.0266	-0.000214	-0.0394	-0.0260
2.100	-11.9	-0.0134	-0.0193	-0.0327	-0.000207	-0.0597	-0.0319
2.800	-11.2	-0.0111	-0.0271	-0.0382	-0.000171	-0.0839	-0.0373
3.500	-10.5	-0.00612	-0.0360	-0.0421	-0.0000941	-0.112	-0.0411
4.200	-9.80	0.00239	-0.0455	-0.0431	0.0000367	-0.141	-0.0421
4.900	-9.10	0.0153	-0.0547	-0.0394	0.000236	-0.169	-0.0384
5.000	-9.00	0.0176	-0.0559	-0.0383	0.000270	-0.173	-0.0374
5.000	-9.00	0.0176	-0.0559	-0.0383	0.000270	-0.173	-0.0374
5.600	-8.40	0.0336	-0.0623	-0.0288	0.000516	-0.193	-0.0281
6.300	-7.70	0.0578	-0.0667	-0.00886	0.000890	-0.207	-0.00865
7.000	-7.00	0.0886	-0.0654	0.0232	0.00136	-0.202	0.0227
7.000	-7.00	0.0886	-0.0654	0.0232	0.00136	-0.202	0.0227
7.700	-6.30	0.126	-0.0554	0.0702	0.00193	-0.171	0.0686
8.400	-5.60	0.168	-0.0331	0.135	0.00258	-0.102	0.132
9.100	-4.90	0.213	0.00559	0.219	0.00328	0.0173	0.214
9.800	-4.20	0.258	0.0650	0.323	0.00397	0.201	0.315
10.500	-3.50	0.296	0.150	0.446	0.00456	0.463	0.435
11.200	-2.80	0.320	0.263	0.582	0.00492	0.814	0.569
11.900	-2.10	0.317	0.407	0.724	0.00488	1.26	0.707
12.600	-1.40	0.275	0.582	0.856	0.00423	1.80	0.836
13.300	-0.700	0.176	0.783	0.958	0.00270	2.42	0.935
14.000	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	3.10	0.976

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua

Fazendo a superposição dos efeitos de todos carregamentos temos:

x global	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	-2.63e-18	4.93e-16	-1.74
0.700	0.0201	-1.15	-1.46
1.400	0.0408	-1.91	-0.610
2.100	0.0624	-1.87	0.834
2.800	0.0849	-0.602	2.89
3.500	0.108	2.33	5.59
4.200	0.129	7.37	8.90
4.900	0.147	14.9	12.8
5.000	0.149	16.2	13.4
5.000	0.149	16.2	13.4
5.600	0.157	21.7	5.05
6.300	0.158	21.9	-4.51
7.000	0.148	15.4	-14.2
7.000	0.148	15.4	-14.2
7.700	0.130	6.84	-10.3
8.400	0.109	0.831	-6.96
9.100	0.0880	-3.04	-4.20
9.800	0.0681	-5.18	-2.02
10.500	0.0507	-5.98	-0.358
11.200	0.0361	-5.79	0.849
11.900	0.0242	-4.88	1.69
12.600	0.0147	-3.49	2.23
13.300	0.00694	-1.82	2.53
14.000	-1.73e-18	-4.44e-16	2.63

Abaixo seguem os diagramas:

Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Continua

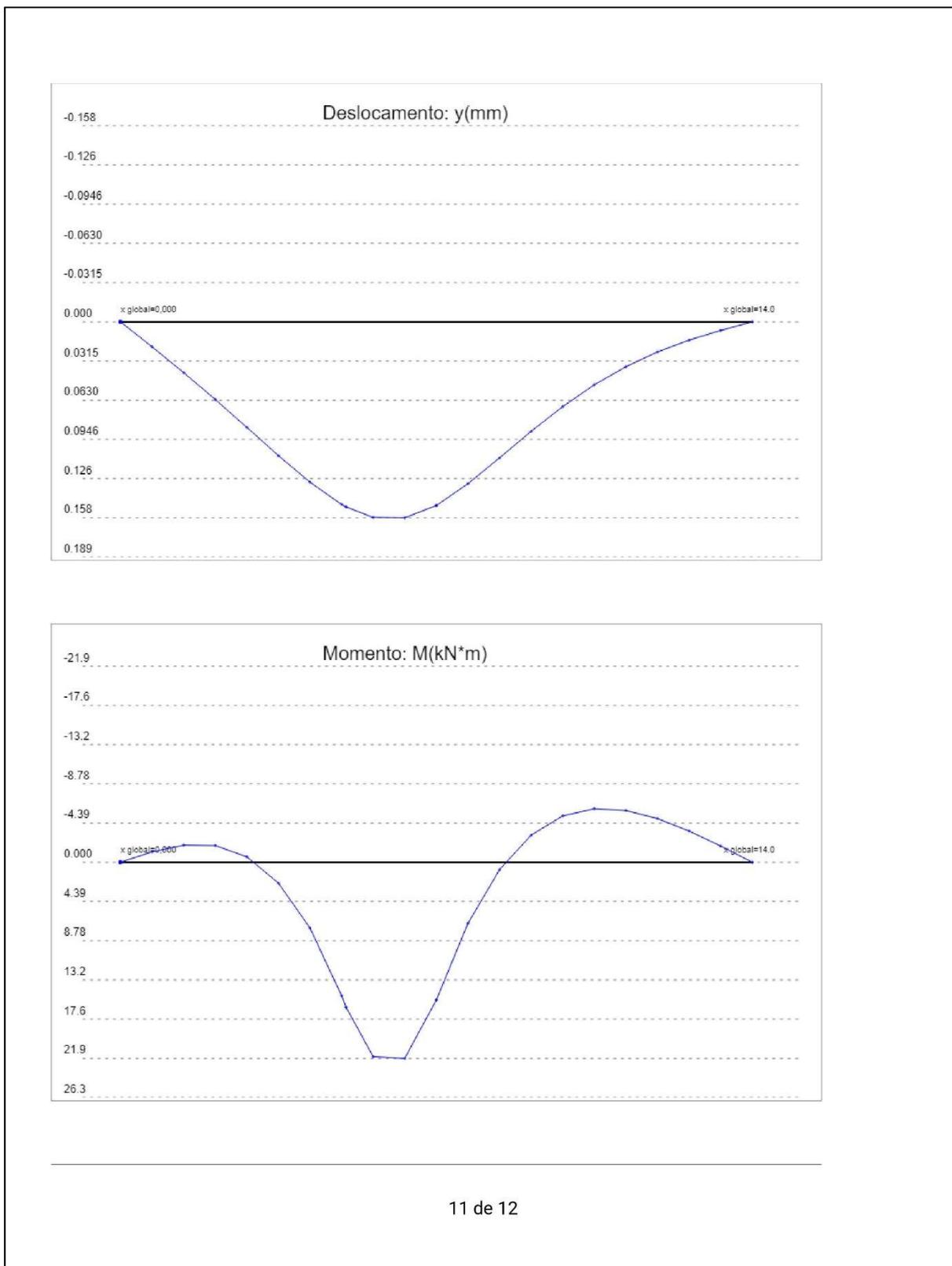
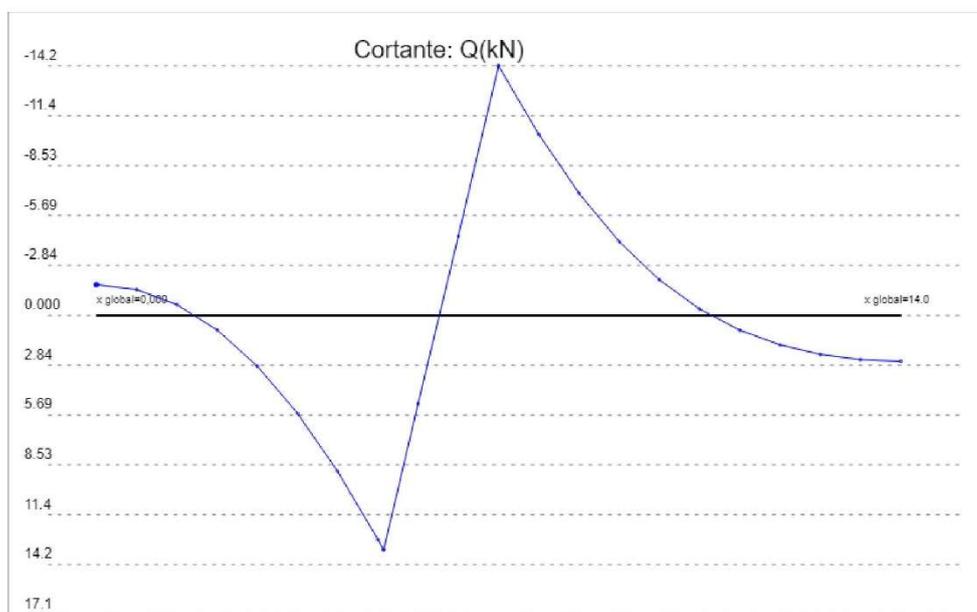


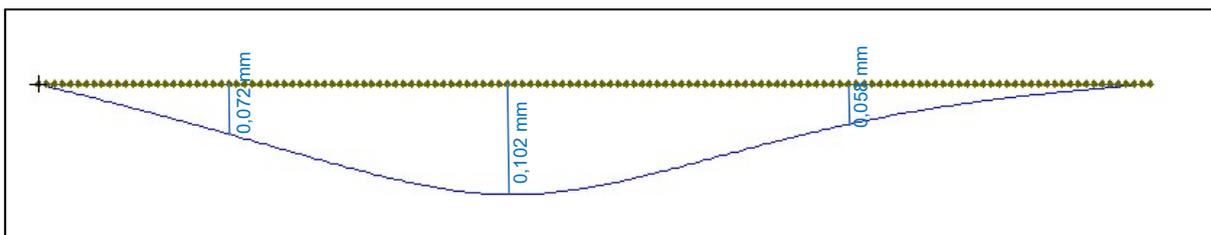
Figura 29 - Relatório PDF do exemplo 03 - Conclusão



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

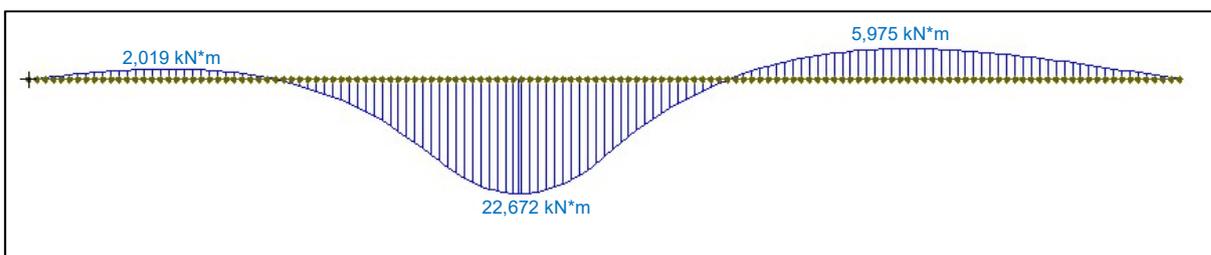
SUSSEKIND, J.C. Curso de Análise Estrutural – Deformações em estruturas e Método das forças. 4ª Edição. Porto Alegre. Globo, 1980. 310 páginas.

Figura 30 - Diagrama de deslocamento do exemplo 03 obtidos no Ftool (2017)



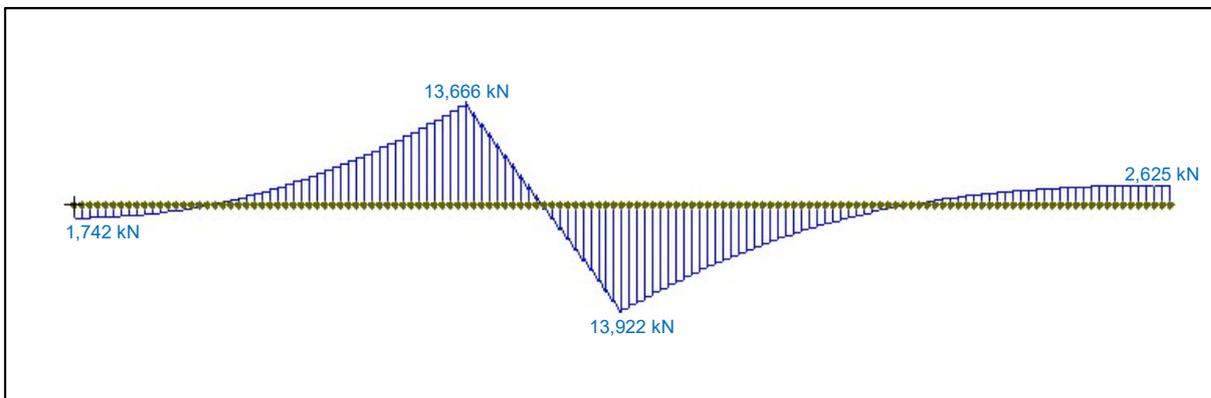
Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Figura 31 - Diagrama de momento fletor do exemplo 03 obtidos no Ftool (2017)



Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Figura 32 - Diagrama de cortante do exemplo 03 obtidos no Ftool (2017)

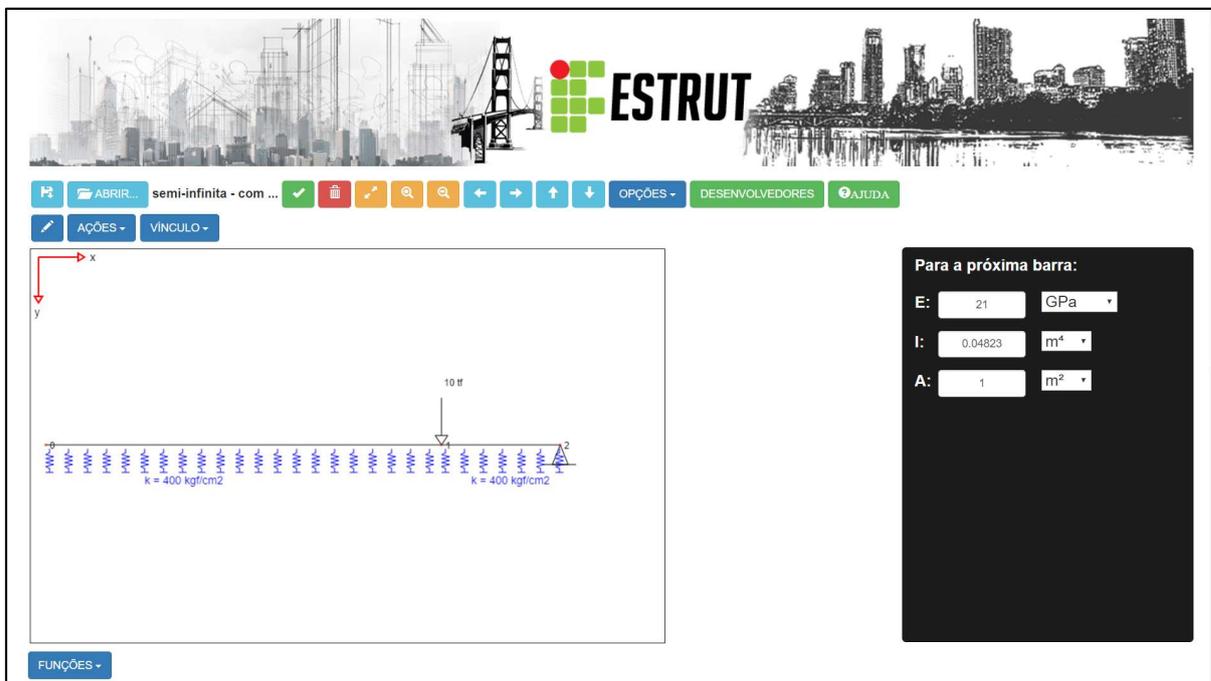


Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Como se pode observar nas Figuras 29 a 32, os valores dos diagramas pelos dois programas são próximos, validando assim os resultados do IFESTRUT.

3.4.4 Exemplo 04 - Viga de comprimento semi-infinito com bordo apoiado à direita e carga pontual (Figura 33 a 40)

Figura 33 - Viga semi-infinita com bordo apoiado à direita e carga pontual



Fonte: Elaborado pelo autor (2018) usando o IFESTRUT.

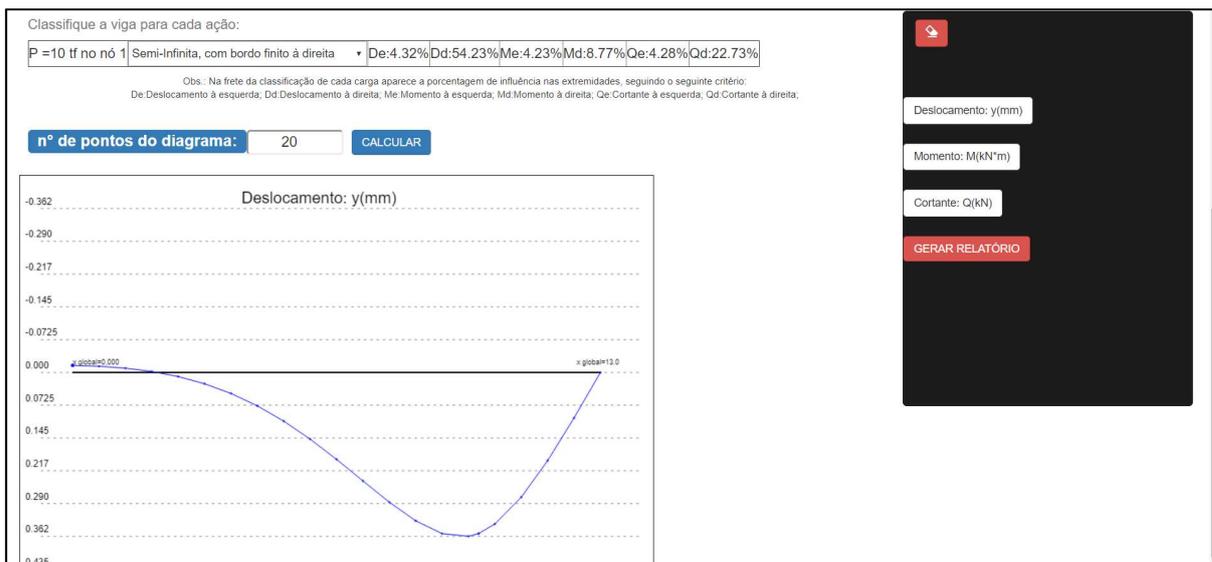
Segue na Figura 34 as características das barras da figura anterior:

Figura 34 - Características das barras do exemplo 04

barra 0 - N6 0 e 1
L = 10.000 m
E = 21.000 GPa
I = 0.048 m ⁴
A = 1.000 m ²
barra 1 - N6 1 e 2
L = 3.000 m
E = 21.000 GPa
I = 0.048 m ⁴
A = 1.000 m ²

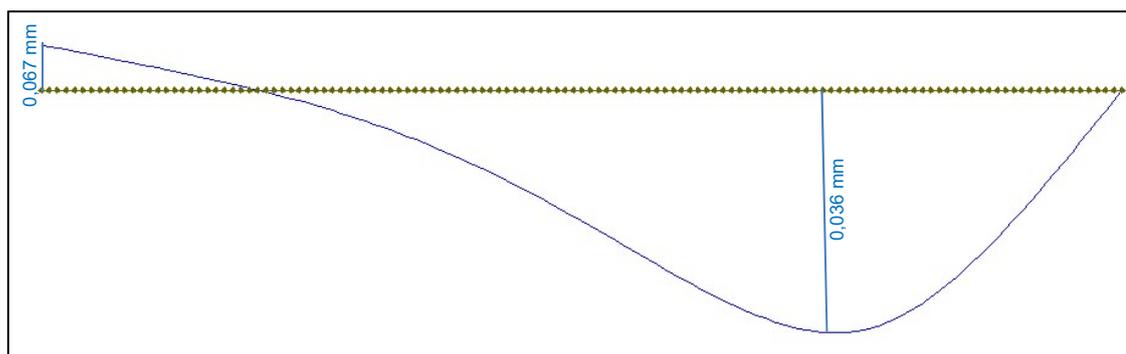
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura 35 - Diagrama de deslocamento do exemplo 04



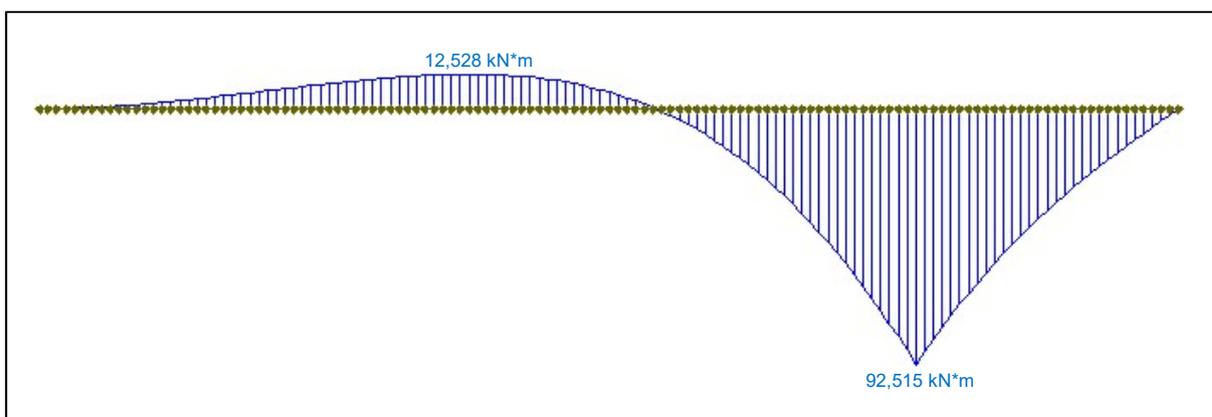
Fonte: Elaborado pelo autor (2018) usando o IFESTRUT.

Figura 36 - Diagrama de deslocamento do exemplo 04 obtidos no Ftool (2017)



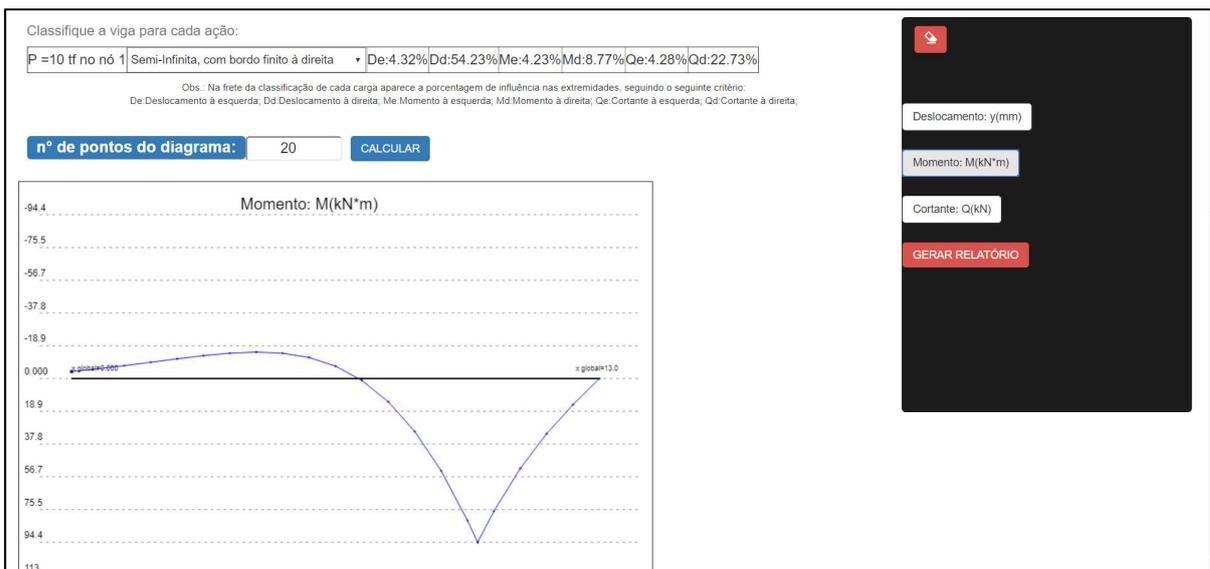
Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Figura 37 - Diagrama de momento fletor do exemplo 04 obtidos no Ftool (2017)



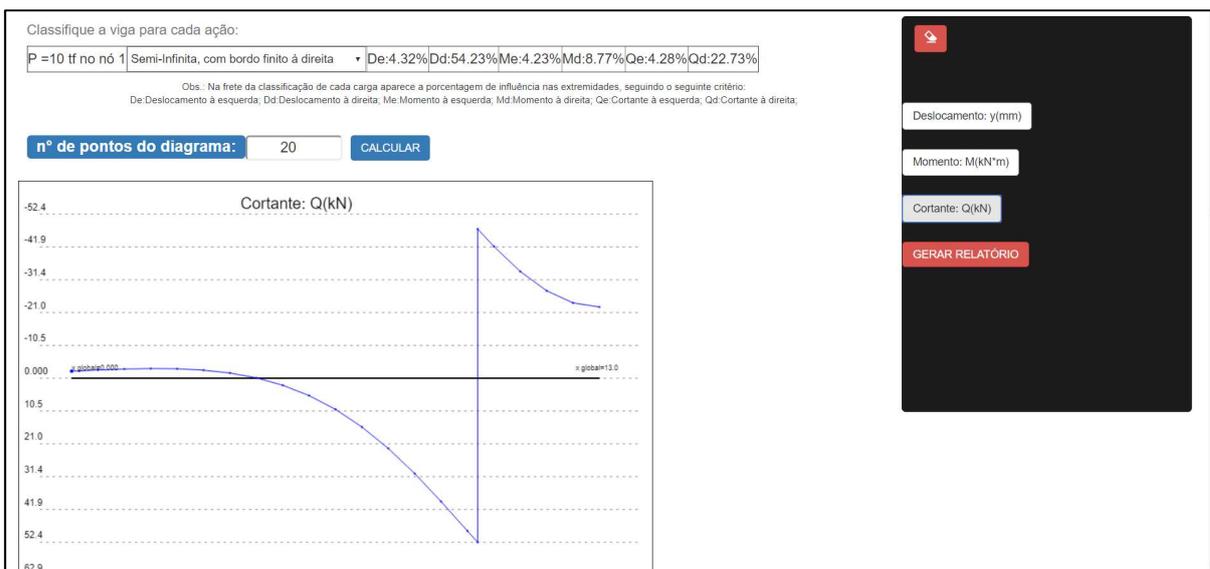
Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Figura 38 - Diagrama de momento fletor do exemplo 04



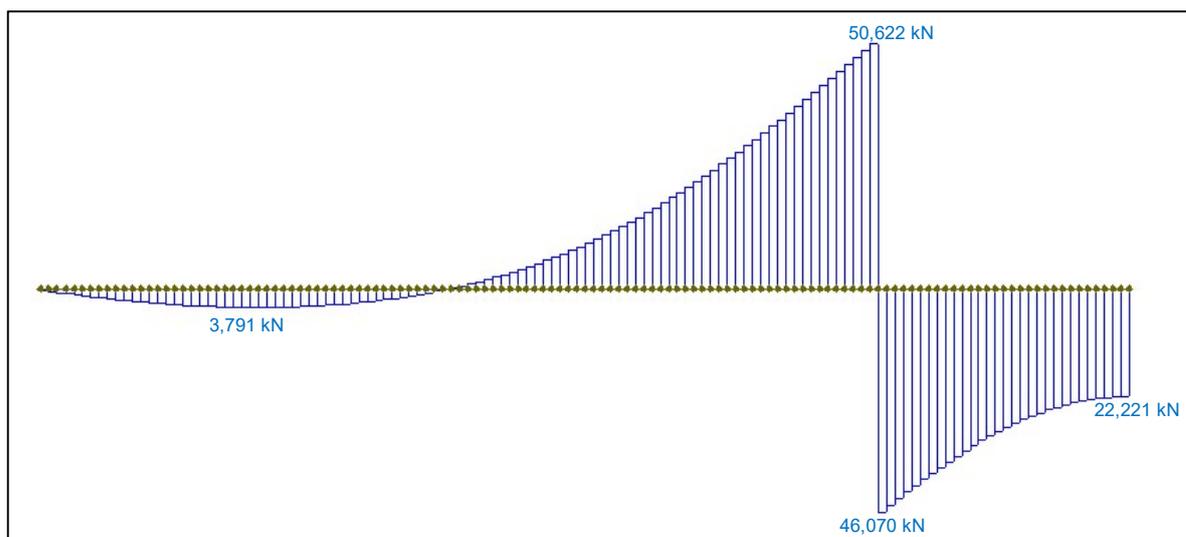
Fonte: Elaborado pelo autor (2018) usando o IFESTRUT.

Figura 39 - Diagrama de cortante do exemplo 04



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura 40 - Diagrama de cortante do exemplo 04 obtidos no Ftool (2017)



Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

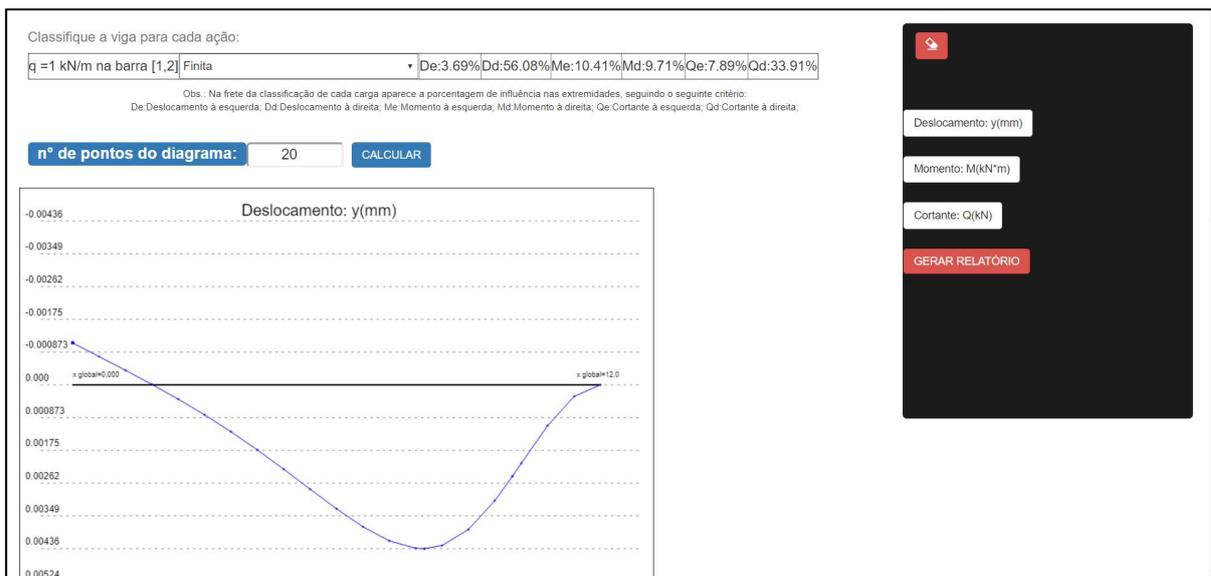
Como se pode observar nas Figuras 33 a 40, os valores dos diagramas pelos dois programas são próximos, validando assim os resultados do IFESTRUT.

3.4.5 Exemplo 05 - Viga de comprimento semi-infinito com bordo engastado (Figuras 41 a 47)

Figura 41 - Viga semi-infinita com bordo engastado à direita

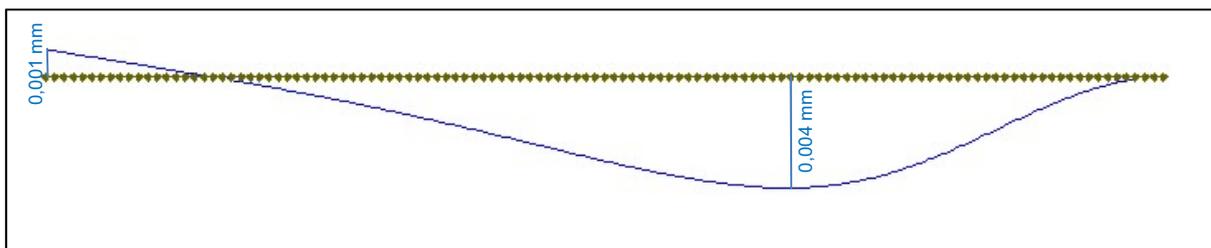
Fonte: Elaborado pelo autor (2018) usando o IFESTRUT.

Figura 42 - Diagrama de deslocamento do exemplo 05



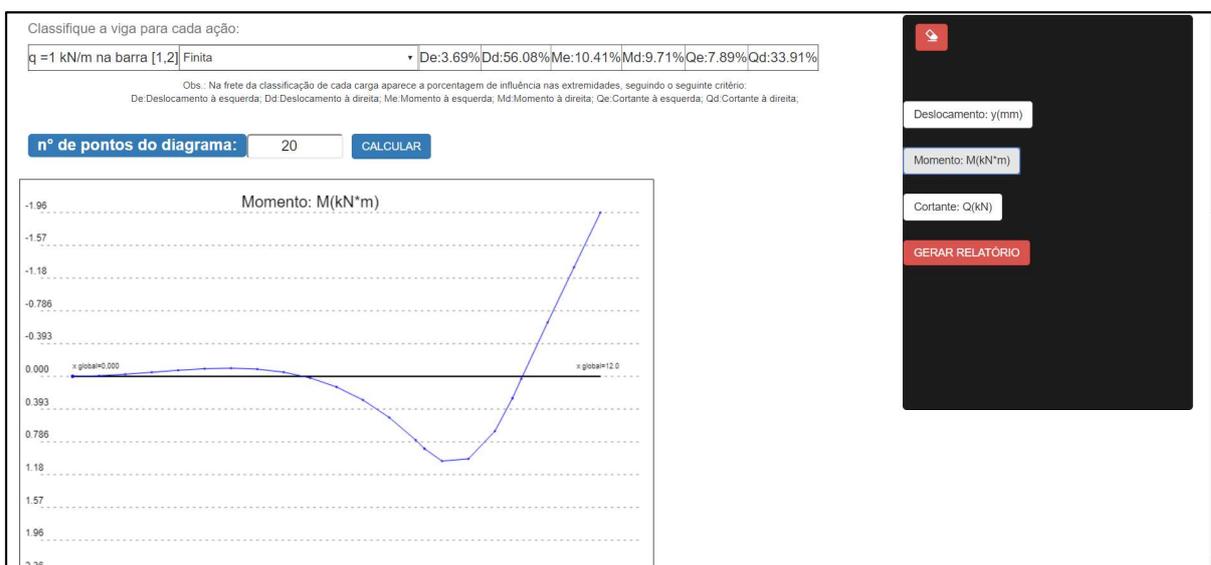
Fonte: Elaborado pelo autor (2018) usando o IFESTRUT.

Figura 43 - Diagrama de deslocamento do exemplo 05 obtidos no Ftool (2017)



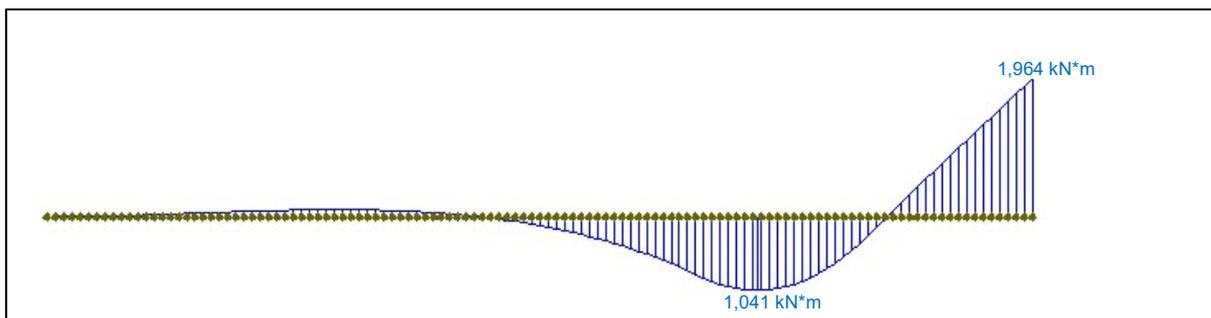
Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Figura 44 - Diagrama de momento fletor do exemplo 05



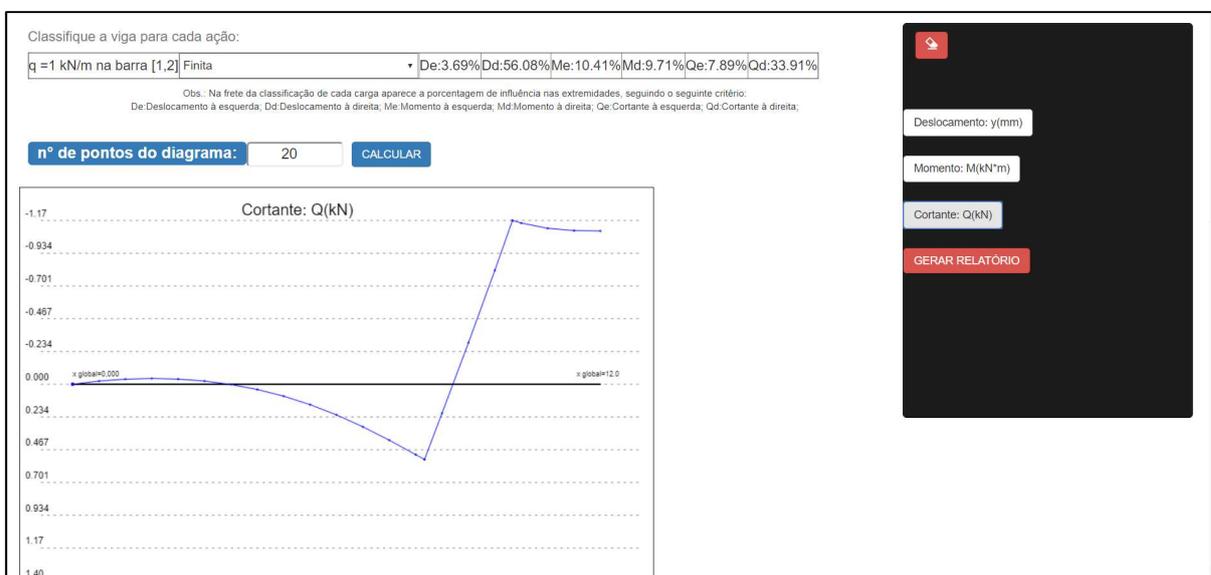
Fonte: Elaborado pelo autor (2018) usando o IFESTRUT.

Figura 45 - Diagrama de momento fletor do exemplo 05 obtidos no Ftool (2017)



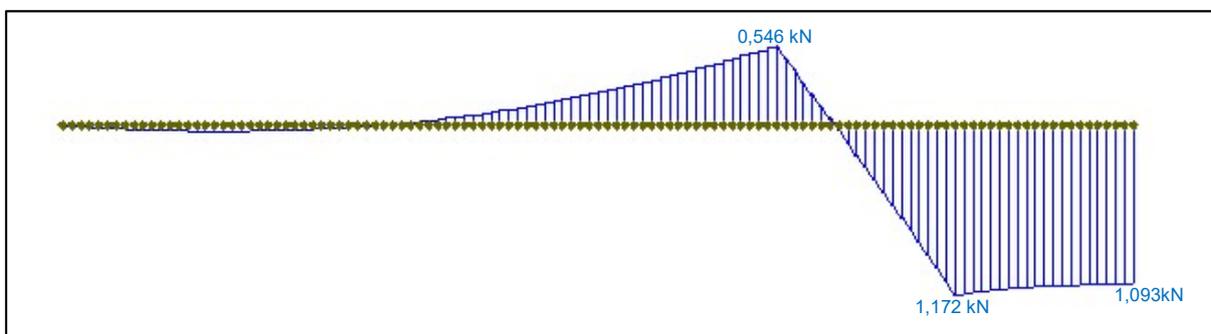
Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Figura 46 - Diagrama de cortante do exemplo 05



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura 47 - Diagrama de cortante do exemplo 05 obtidos no Ftool (2017)

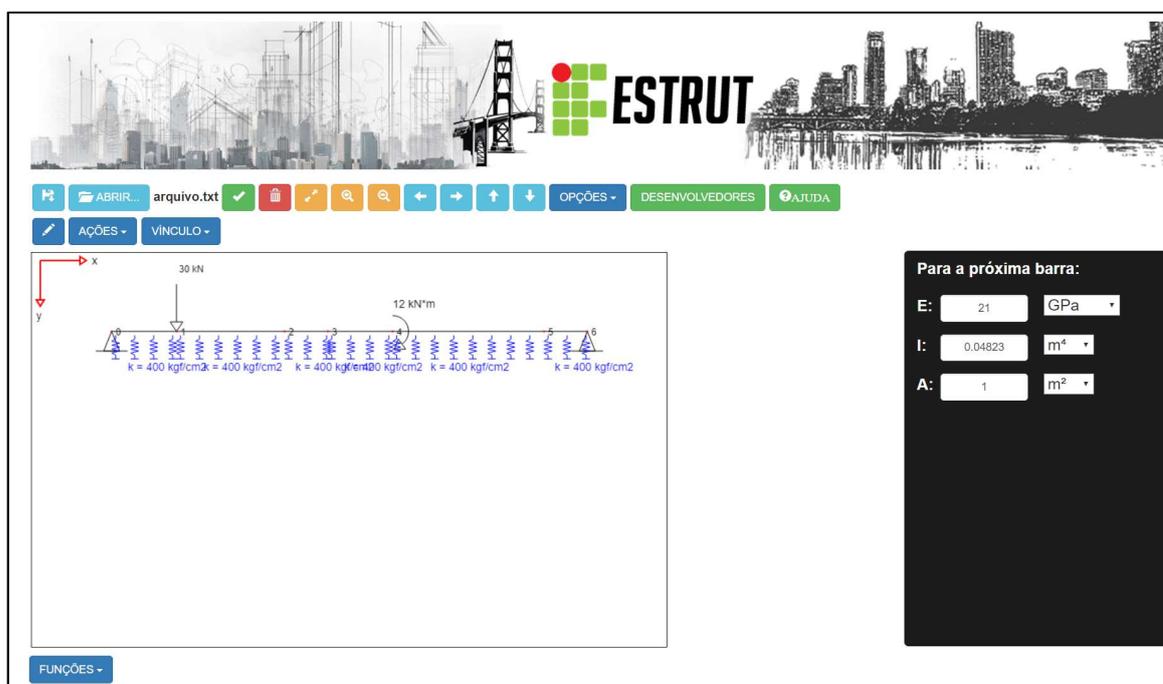


Fonte: Elaborado e adaptado pelo autor (2018) usando o Ftool (2017).

Comparando-se os resultados com entre o Ftool (2017) e o IFESTRUT, nota-se que os valores são bem parecidos.

3.4.6 Exemplo 06 - Viga com uma carga pontual e um momento concentrado (Figuras 48 a 52)

Figura 48 - Viga com uma carga pontual e um momento concentrado



Fonte: Elaborado pelo autor (2018) usando o IFESTRUT.

A viga, internamente, no primeiro momento, foi classificada da seguinte maneira:

Figura 49 - Classificação da viga do exemplo da Figura 48 apresentada pelo programa

Classifique a viga para cada ação:

P = 30 kN no nó 1	Semi-Infinita, com bordo finito à esquerda ▾	De:54.23%	Dd:0.17%	Me:8.77%	Md:0.31%	Qe:22.73%	Qd:0.24%
M = 12 kN*m - no nó 4	Semi-Infinita, com bordo finito à direita ▾	De:0.63%	Dd:0.82%	Me:0.96%	Md:5.59%	Qe:1.28%	Qd:2.13%

Obs.: Na frete da classificação de cada carga aparece a porcentagem de influência nas extremidades, seguindo o seguinte critério:
 De:Deslocamento à esquerda; Dd:Deslocamento à direita; Me:Momento à esquerda; Md:Momento à direita; Qe:Cortante à esquerda; Qd:Cortante à direita;

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Para classificar a carga P, os esforços seguem abaixo:

Figura 50 - Considerações para classificação da viga para a carga pontual

Classificação da Viga para o carregamento em questão: (todos valores estão sendo considerados em módulo)

Deslocamento Máximo: 0.118 mm

Deslocamento no nó 0 = 0.0641 mm \geq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00591 mm

Deslocamento no nó 6 = 0.000198 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00591 mm

Momento Fletor Máximo: 23.8 kN*m

Momento Fletor no nó 0 = 2.09 kN*m \geq 5% do Momento Fletor Máximo = 1.19 kN*m

Momento Fletor no nó 6 = 0.0743 kN*m \leq 5% do Momento Fletor Máximo = 1.19 kN*m

Cortante Máxima: 15.0 kN

Cortante no nó 0 = 3.41 kN \geq 5% da Cortante Máxima = 0.750 kN

Cortante no nó 6 = 0.036 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.750 kN

Portanto a classificação recomendada é: Viga Semi-Infinita, com bordo finito à esquerda

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Como pode observar na Figura 50 os esforços de deslocamento e de cortante no nó 6 são maiores que 5% do máximo.

Figura 51 - Considerações para classificação da viga para o momento aplicado

Classificação da Viga para o carregamento em questão: (todos valores estão sendo considerados em módulo)

Deslocamento Máximo: 0.0641 mm

Deslocamento no nó 0 = 0.000404 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00321 mm

Deslocamento no nó 6 = 0.000524 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00321 mm

Momento Fletor Máximo: 6.00 kN*m

Momento Fletor no nó 0 = 0.0575 kN*m \leq 5% do Momento Fletor Máximo = 0.300 kN*m

Momento Fletor no nó 6 = 0.335 kN*m \geq 5% do Momento Fletor Máximo = 0.300 kN*m

Cortante Máxima: 3.41 kN

Cortante no nó 0 = 0.0438 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.170 kN

Cortante no nó 6 = 0.0725 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.170 kN

Portanto a classificação recomendada é: Viga Semi-Infinita, com bordo finito à direita

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Como pode observar na Figura 51, o esforço de momento fletor do nó 6 é maior que 5% do máximo. Segue na Equação 57 as porcentagens a qual esses representam do esforço máximo, respectivamente:

$$\text{Momento Fletor no nó 6: } \frac{0,335}{6,00} = 0,056 \rightarrow 5,6\% \text{ do esforço máximo} \quad (57)$$

Nesse exemplo, nota-se que o programa classificou a influência do momento de 12 kN * m como semi-infinita, com bordo finito à direita porque um dos esforços (ou todos) na extremidade da direita deram maiores que 5%. Porém, essa porcentagem foi somente um pouco maior do que 5%. Considerando que esse limite de 5%, como explicado, é uma convenção dos autores, pode o usuário querer aumentar este limite, principalmente em casos de pouca diferença como este. E é aqui que entra a possibilidade de alterar a classificação para cada carga.

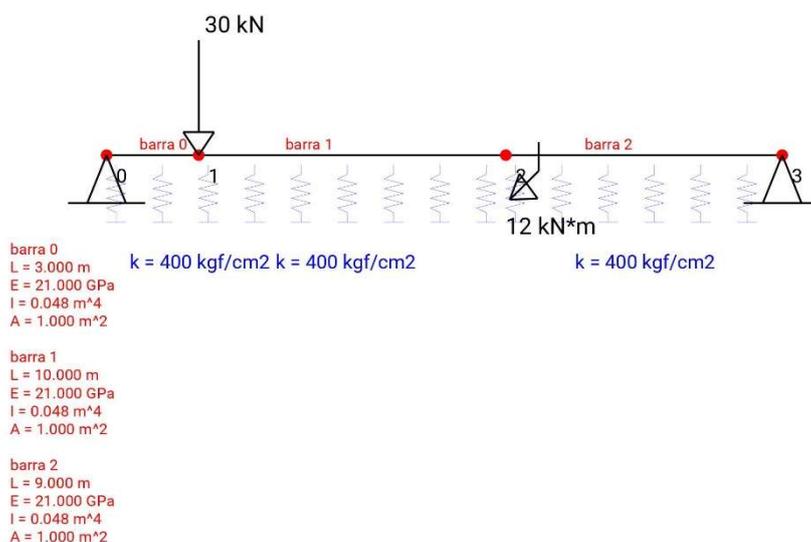
Portanto, será demonstrado o resultado caso o usuário resolva trocar a classificação da viga: o momento aplicado $M_c = 12 \text{ kN} * \text{m}$ passará a ser considerada como infinita. Abaixo segue o relatório gerado em PDF (Figura 52). Esse será apresentado na íntegra para que se possa saber como é feita a classificação da viga quando há duas cargas e o usuário altera a classificação inicial dada pelo programa.

Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 - Continua



NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
 Título: Cálculo de viga sobre base elástica
 Data: 31/11/2017
 Autor: Isabela Cassia Dominical Parra
 Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
 Tipo: Iniciação Científica Voluntária
 Curso: Engenharia Civil

A viga a calcular é a seguinte:



Dados da Estrutura apresentada:

Coefficiente de Rigidez (k): $400 \text{ kgf/cm}^2 = 4.00 \text{e}+4 \text{ kN/m}^2$
 Módulo de Elasticidade (E): $21.0 \text{ GPa} = 2.10 \text{e}+7 \text{ kN/m}^2$
 Momento de Inércia (I): 0.0482 m^4
 Comprimento da Viga (L): 22.0 m

Abaixo segue a resolução:

Parâmetro β :

$$\beta = (k/(4*E*I))^{1/4} = (4.00 \text{e}+4 / (4 * 2.10 \text{e}+7 * 0.0482))^{1/4} = 0.31522 \text{ m}^{-1}$$

Quando $\beta * L < \pi/4$, a viga pode ser considerada infinitamente rígida, sem deformações e esforços por flexão, sendo a reação de apoio com o mesmo módulo, mas oposta ao carregamento, portanto não sendo válida a teoria de viga sobre base elástica.

$$\beta * L = 6.9348 > \pi/4 = 0.7854$$

Portanto, é necessário considerar os efeitos da base elástica.

Dependendo da influência da carga nas extremidades da viga, considera-se a mesma como infinita, semi-infinita ou finita, ou seja, se a carga está tão distante das extremidades direita e esquerda que não tem

Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 - Continua

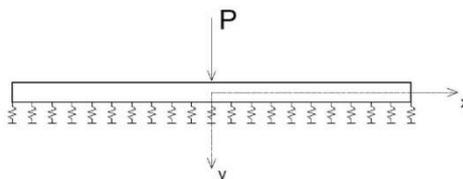
mais influência ali, a viga é considerada como infinita. Se a carga está muito longe de uma das bordas e perto da outra, a viga é considerada semi-infinita. E, finalmente, se a carga está perto das duas extremidades, a viga é considerada finita. Para este programa, caso a influência da carga provoque deslocamento, cortante e momento fletor nas extremidades com valores em módulo menores que 5% de seus valores máximos em módulo, sugere-se ao usuário a classificação como infinita. Porém, o usuário tem a liberdade de classificá-la de outra maneira. Prevalece a escolha do usuário.

****Carga pontual P aplicada:**

Assim como é feito para os outros tipos de ação, a solução da viga começa pela resolução da mesma como se fosse uma viga infinita (funções a seguir). Após isso, caso ela não seja infinita, são realizados cálculos adicionais.

É necessário considerar a origem local, $x=0$, no ponto de aplicação da carga. Portanto, será utilizado uma coordenada global (x_g) e uma coordenada local (x) para cada seção da viga, para cada carga aplicada.

As funções abaixo (viga infinita) são aplicadas somente para x positivo. Analisando as funções auxiliares, conclui-se que os diagramas de deslocamento (y) e de momento fletor (M) possuem simetria em relação ao eixo y , portanto os valores dos pontos são iguais tanto para " x " negativo quanto para " x " positivo. Já o diagrama de esforço cortante (Q) é antissimétrico em relação ao eixo y , ou seja, os valores dos pontos com " x " negativo possuem sinais contrários aos dos pontos " x " positivos.



$$\varphi = e^{-\beta x} * (\cos(\beta x) + \text{sen}(\beta x))$$

$$y = \frac{P * \beta}{2 * k} * \varphi(\beta x)$$

$$\xi = e^{-\beta x} * \text{sen}(\beta x)$$

$$y' = -\frac{P * \beta^2}{k} * \xi(\beta x)$$

$$\psi = -e^{-\beta x} * (\text{sen}(\beta x) - \cos(\beta x))$$

$$M = \frac{P}{4 * \beta} * \psi(\beta x)$$

$$\theta = e^{-\beta x} * \cos(\beta x)$$

$$Q = \frac{-P}{2} * \theta(\beta x)$$

Carga Pontual:

P = 30 kN no nó 1

Considerando viga infinita:

x global	x	$\varphi(\beta x)$	$\psi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	-3.00	0.542	-0.0877	0.227	0.0641	-2.09	3.41
1.100	-1.90	0.764	0.144	0.454	0.0903	3.43	6.81
2.200	-0.800	0.946	0.559	0.753	0.112	13.3	11.3
3.000	0.00	1.00	1.00	1.00	0.118	23.8	15.0
3.000	0.00	1.00	1.00	1.00	0.118	23.8	-15.0
3.300	0.300	0.992	0.820	0.906	0.117	19.5	-13.6

Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 - Continua

4.400	1.40	0.856	0.307	0.582	0.101	7.30	-8.72
5.500	2.50	0.643	-0.00171	0.321	0.0760	-0.0406	-4.81
6.600	3.60	0.427	-0.156	0.136	0.0505	-3.70	-2.04
7.700	4.70	0.247	-0.206	0.0203	0.0292	-4.90	-0.304
8.800	5.80	0.114	-0.196	-0.0409	0.0135	-4.67	0.614
9.900	6.90	0.0289	-0.158	-0.0645	0.00342	-3.76	0.968
11.000	8.00	-0.0187	-0.112	-0.0654	-0.00221	-2.67	0.981
12.100	9.10	-0.0394	-0.0700	-0.0547	-0.00465	-1.67	0.820
13.000	10.0	-0.0432	-0.0423	-0.0428	-0.00511	-1.01	0.641
13.000	10.0	-0.0432	-0.0423	-0.0428	-0.00511	-1.01	0.641
13.200	10.2	-0.0430	-0.0371	-0.0400	-0.00508	-0.882	0.601
14.300	11.3	-0.0375	-0.0143	-0.0259	-0.00443	-0.341	0.389
15.400	12.4	-0.0284	-0.000518	-0.0144	-0.00335	-0.0123	0.217
16.500	13.5	-0.0190	0.00647	-0.00626	-0.00224	0.154	0.0939
17.600	14.6	-0.0111	0.00887	-0.00110	-0.00131	0.211	0.0165
18.700	15.7	-0.00523	0.00856	0.00166	-0.000618	0.204	-0.0249
19.800	16.8	-0.00142	0.00695	0.00276	-0.000168	0.165	-0.0414
20.900	17.9	0.000723	0.00496	0.00284	0.0000854	0.118	-0.0426
22.000	19.0	0.00167	0.00312	0.00240	0.000198	0.0743	-0.0360

Classificação da Viga para o carregamento em questão: (todos valores estão sendo considerados em módulo)

Deslocamento Máximo: 0.118 mm

Deslocamento no nó 0 = 0.0641 mm \geq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00591 mm

Deslocamento no nó 3 = 0.000198 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00591 mm

Momento Fletor Máximo: 23.8 kN*m

Momento Fletor no nó 0 = 2.09 kN*m \geq 5% do Momento Fletor Máximo = 1.19 kN*m

Momento Fletor no nó 3 = 0.0743 kN*m \leq 5% do Momento Fletor Máximo = 1.19 kN*m

Cortante Máxima: 15.0 kN

Cortante no nó 0 = 3.41 kN \geq 5% da Cortante Máxima = 0.750 kN

Cortante no nó 3 = 0.036 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.750 kN

Portanto a classificação recomendada é: Viga Semi-Infinita, com bordo finito à esquerda

Escolha do Usuário: Viga Semi-Infinita, com bordo finito à esquerda

Como a viga para esse tipo de carregamento é semi-infinita, se fazem necessários cálculos adicionais.

Para proceder com os cálculos é preciso aplicar um P0 e um Mc0, no ponto $x_g=0$, que sejam capazes de cancelar os efeitos provocados a esquerda desse ponto, tornando-se assim a viga infinita equivalente (já calculado anteriormente).

Ao final basta somar os efeitos da viga infinita equivalente, com os efeitos de P0 e Mc0.

Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 - Continua

Para achar o valor de P_0 e Mc_0 de uma viga semi-infinita com bordo apoiado a esquerda, é preciso resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{P_0 * \beta}{2 * k} * \varphi(0) + \frac{Mc_0 * \beta^2}{k} * \xi(0) = -y_A \\ \frac{P_0}{4 * \beta} * \psi(0) + \frac{Mc_0}{2} * \theta(0) = -M_A \end{cases}$$

Sendo:

y_A : Deslocamento no ponto $xg=0$

M_A : Momento Fletor no ponto $xg=0$

Sistema a ser resolvido:

0.00000394	0.00	P0	-0.0000641
0.793	0.500	Mc0	2.09

Este sistema pode ser resolvido, por exemplo, por Gauss, que pode ser estudado em <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>. Para tanto, utilize o arquivo txt (sistema 0) gerado juntamente com este relatório, que pode ser lido pelo referido programa.

Resolvendo o sistema acima, encontram-se os seguintes valores:

$P_0 = -16.3$

$Mc_0 = 30.0$

Carga Pontual:

$P_0 = -16.3$ kN no nó 0

x global	x	$\varphi(\beta x)$	$\psi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.00	1.00	1.00	1.00	-0.0641	-12.9	8.13
1.100	1.10	0.905	0.425	0.665	-0.0580	-5.48	5.41
2.200	2.20	0.704	0.0649	0.384	-0.0451	-0.837	3.13
3.000	3.00	0.542	-0.0877	0.227	-0.0348	1.13	1.85
3.000	3.00	0.542	-0.0877	0.227	-0.0348	1.13	1.85
3.300	3.30	0.484	-0.126	0.179	-0.0310	1.63	1.45
4.400	4.40	0.291	-0.200	0.0457	-0.0187	2.58	0.371
5.500	5.50	0.146	-0.203	-0.0286	-0.00934	2.62	-0.233
6.600	6.60	0.0481	-0.170	-0.0609	-0.00308	2.19	-0.496
7.700	7.70	-0.00886	-0.125	-0.0667	0.000568	1.61	-0.543
8.800	8.80	-0.0358	-0.0807	-0.0582	0.00230	1.04	-0.474
9.900	9.90	-0.0432	-0.0450	-0.0441	0.00277	0.581	-0.359
11.000	11.0	-0.0395	-0.0196	-0.0296	0.00253	0.252	-0.240
12.100	12.1	-0.0310	-0.00351	-0.0173	0.00199	0.0453	-0.140
13.000	13.0	-0.0231	0.00399	-0.00958	0.00148	-0.0515	-0.0779
13.000	13.0	-0.0231	0.00399	-0.00958	0.00148	-0.0515	-0.0779

4 de 10

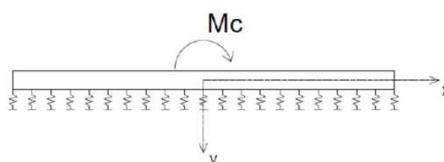
Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 - Continua

13.200	13.2	-0.0215	0.00511	-0.00817	0.00138	-0.0660	-0.0665
14.300	14.3	-0.0130	0.00855	-0.00224	0.000836	-0.110	-0.0182
15.400	15.4	-0.00661	0.00882	0.00110	0.000424	-0.114	0.00897
16.500	16.5	-0.00228	0.00745	0.00259	0.000146	-0.0962	0.0210
17.600	17.6	0.000276	0.00550	0.00289	-0.000177	-0.0710	0.0235
18.700	18.7	0.00151	0.00359	0.00255	-0.0000965	-0.0463	0.0207
19.800	19.8	0.00186	0.00203	0.00195	-0.000119	-0.0262	0.0158
20.900	20.9	0.00173	0.000900	0.00131	-0.000111	-0.0116	0.0107
22.000	22.0	0.00136	0.000183	0.000774	-0.0000874	-0.00237	0.00629

**Com momento aplicado:

É necessário considerar a origem local, $x=0$, no ponto de aplicação do momento. Portanto, será utilizado uma coordenada global (x_g), e uma coordenada local (x) para cada seção da viga, para cada momento aplicado.

As funções abaixo (viga infinita) são aplicadas somente para x positivo. Analisando as funções auxiliares, conclui-se que os diagramas de deslocamento (y) e de esforço cortante (Q) possuem simetria em relação ao eixo y , portanto os valores dos pontos são iguais tanto para " x " negativo quanto para " x " positivo. Já o diagrama de momento fletor (M) é antissimétrico em relação ao eixo y , ou seja, os valores dos pontos com " x " negativo possuem sinais contrários aos dos pontos " x " positivos.



$$\xi = e^{-\beta x} * \text{sen}(\beta x)$$

$$y = \frac{Mc * \beta^2}{k} * \xi(\beta x)$$

$$\psi = -e^{-\beta x} * (\text{sen}(\beta x) - \text{cos}(\beta x))$$

$$y' = \frac{Mc * \beta^3}{k} * \psi(\beta x)$$

$$\theta = e^{-\beta x} * \text{cos}(\beta x)$$

$$M = \frac{Mc}{2} * \theta(\beta x)$$

$$\varphi = e^{-\beta x} * (\text{cos}(\beta x) + \text{sen}(\beta x))$$

$$Q = \frac{-Mc * \beta}{2} * \varphi(\beta x)$$

Momento Aplicado:

$Mc_0 = 30.0 \text{ kN*m}$ no nó 0

x global	x	$\xi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	$\varphi(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	15.0	-4.72
1.100	1.10	0.240	0.665	0.905	0.0179	9.97	-4.28
2.200	2.20	0.320	0.384	0.704	0.0238	5.76	-3.33

Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 - Continua

3.000	3.00	0.315	0.227	0.542	0.0235	3.41	-2.56
3.000	3.00	0.315	0.227	0.542	0.0235	3.41	-2.56
3.300	3.30	0.305	0.179	0.484	0.0227	2.68	-2.28
4.400	4.40	0.246	0.0457	0.291	0.0183	0.684	-1.38
5.500	5.50	0.174	-0.0286	0.146	0.0130	-0.429	-0.688
6.600	6.60	0.109	-0.0609	0.0481	0.00812	-0.913	-0.227
7.700	7.70	0.0578	-0.0667	-0.00886	0.00431	-1.00	0.0419
8.800	8.80	0.0224	-0.0582	-0.0358	0.00167	-0.873	0.169
9.900	9.90	0.000922	-0.0441	-0.0432	0.0000687	-0.661	0.204
11.000	11.0	-0.00999	-0.0296	-0.0395	-0.000744	-0.443	0.187
12.100	12.1	-0.0137	-0.0173	-0.0310	-0.00102	-0.259	0.146
13.000	13.0	-0.0136	-0.00958	-0.0231	-0.00101	-0.144	0.109
13.000	13.0	-0.0136	-0.00958	-0.0231	-0.00101	-0.144	0.109
13.200	13.2	-0.0133	-0.00817	-0.0215	-0.000989	-0.122	0.101
14.300	14.3	-0.0108	-0.00224	-0.0130	-0.000804	-0.0336	0.0616
15.400	15.4	-0.00772	0.00110	-0.00661	-0.000575	0.0165	0.0312
16.500	16.5	-0.00487	0.00259	-0.00228	-0.000362	0.0388	0.0108
17.600	17.6	-0.00261	0.00289	0.000276	-0.000195	0.0433	-0.00130
18.700	18.7	-0.00104	0.00255	0.00151	-0.0000777	0.0382	-0.00711
19.800	19.8	-0.0000814	0.00195	0.00186	-0.00000606	0.0292	-0.00881
20.900	20.9	0.000413	0.00131	0.00173	0.0000308	0.0197	-0.00816
22.000	22.0	0.000590	0.000774	0.00136	0.0000440	0.0116	-0.00644

Momento Aplicado:

Mc= 12 kN*m- no nó 2

Considerando viga infinita:

x global	x	$\xi(\beta x)$	$\theta(\beta x)$	$\varphi(\beta x)$	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	-13.0	-0.0136	-0.00958	-0.0231	0.000404	0.0575	0.0438
1.100	-11.9	-0.0134	-0.0193	-0.0327	0.000401	0.116	0.0619
2.200	-10.8	-0.00863	-0.0321	-0.0407	0.000257	0.193	0.0770
3.000	-10.0	-0.000454	-0.0428	-0.0432	0.0000135	0.257	0.0817
3.000	-10.0	-0.000454	-0.0428	-0.0432	0.0000135	0.257	0.0817
3.300	-9.70	0.00394	-0.0468	-0.0429	-0.000117	0.281	0.0811
4.400	-8.60	0.0278	-0.0604	-0.0327	-0.000827	0.362	0.0618
5.500	-7.50	0.0660	-0.0670	-0.00106	-0.00197	0.402	0.00200
6.600	-6.40	0.120	-0.0574	0.0625	-0.00358	0.345	-0.118

6 de 10

Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 – Continua

7.700	-5.30	0.187	-0.0188	0.168	-0.00558	0.113	-0.319
8.800	-4.20	0.258	0.0650	0.323	-0.00769	-0.390	-0.611
9.900	-3.10	0.312	0.211	0.523	-0.00930	-1.26	-0.988
11.000	-2.00	0.314	0.430	0.744	-0.00935	-2.58	-1.41
12.100	-0.900	0.211	0.723	0.934	-0.00628	-4.34	-1.77
13.000	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	-6.00	-1.89
13.000	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	6.00	-1.89
13.200	0.200	0.0592	0.937	0.996	0.00176	5.62	-1.88
14.300	1.30	0.264	0.609	0.873	0.00788	3.65	-1.65
15.400	2.40	0.322	0.341	0.663	0.00960	2.05	-1.25
16.500	3.50	0.296	0.150	0.446	0.00883	0.897	-0.843
17.600	4.60	0.233	0.0283	0.261	0.00694	0.170	-0.494
18.700	5.70	0.162	-0.0372	0.124	0.00482	-0.223	-0.235
19.800	6.80	0.0985	-0.0635	0.0350	0.00294	-0.381	-0.0662
20.900	7.90	0.0503	-0.0659	-0.0157	0.00150	-0.396	0.0296
22.000	9.00	0.0176	-0.0559	-0.0383	0.000524	-0.335	0.0725

Classificação da Viga para o carregamento em questão: (todos valores estão sendo considerados em módulo)

Deslocamento Máximo: 0.0641 mm

Deslocamento no nó 0 = 0.000404 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00321 mm

Deslocamento no nó 3 = 0.000524 mm \leq 5% do Deslocamento Máximo = 0.00321 mm

Momento Fletor Máximo: 6.00 kN*m

Momento Fletor no nó 0 = 0.0575 kN*m \leq 5% do Momento Fletor Máximo = 0.300 kN*m

Momento Fletor no nó 3 = 0.335 kN*m \geq 5% do Momento Fletor Máximo = 0.300 kN*m

Cortante Máxima: 3.41 kN

Cortante no nó 0 = 0.0438 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.170 kN

Cortante no nó 3 = 0.0725 kN \leq 5% da Cortante Máxima = 0.170 kN

Portanto a classificação recomendada é: Viga Semi-Infinita, com bordo finito à direita

Escolha do Usuário: Viga Infinita

Como a viga para esse tipo de carregamento é infinita, não se fazem necessários cálculos adicionais.

Fazendo a superposição dos efeitos de todos carregamentos temos:

x global	y(mm)	M(kN*m)	Q(kN)
0.000	0.000404	0.0575	6.86
1.100	0.0505	8.03	8.00

7 de 10

Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 – Continua

2.200	0.0908	18.4	11.2
3.000	0.107	28.6	14.4
3.000	0.107	28.6	-15.6
3.300	0.109	24.1	-14.3
4.400	0.100	10.9	-9.67
5.500	0.0777	2.55	-5.73
6.600	0.0520	-2.08	-2.88
7.700	0.0284	-4.18	-1.12
8.800	0.00981	-4.89	-0.302
9.900	-0.00304	-5.10	-0.175
11.000	-0.00978	-5.44	-0.480
12.100	-0.00997	-6.22	-0.940
13.000	-0.00463	-7.20	-1.22
13.000	-0.00463	4.80	-1.22
13.200	-0.00293	4.55	-1.25
14.300	0.00348	3.17	-1.22
15.400	0.00610	1.94	-0.998
16.500	0.00637	0.994	-0.717
17.600	0.00542	0.353	-0.455
18.700	0.00403	-0.0275	-0.247
19.800	0.00264	-0.213	-0.101
20.900	0.00150	-0.269	-0.0105
22.000	0.000678	-0.252	0.0364

Abaixo seguem os diagramas:

Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 – Continua

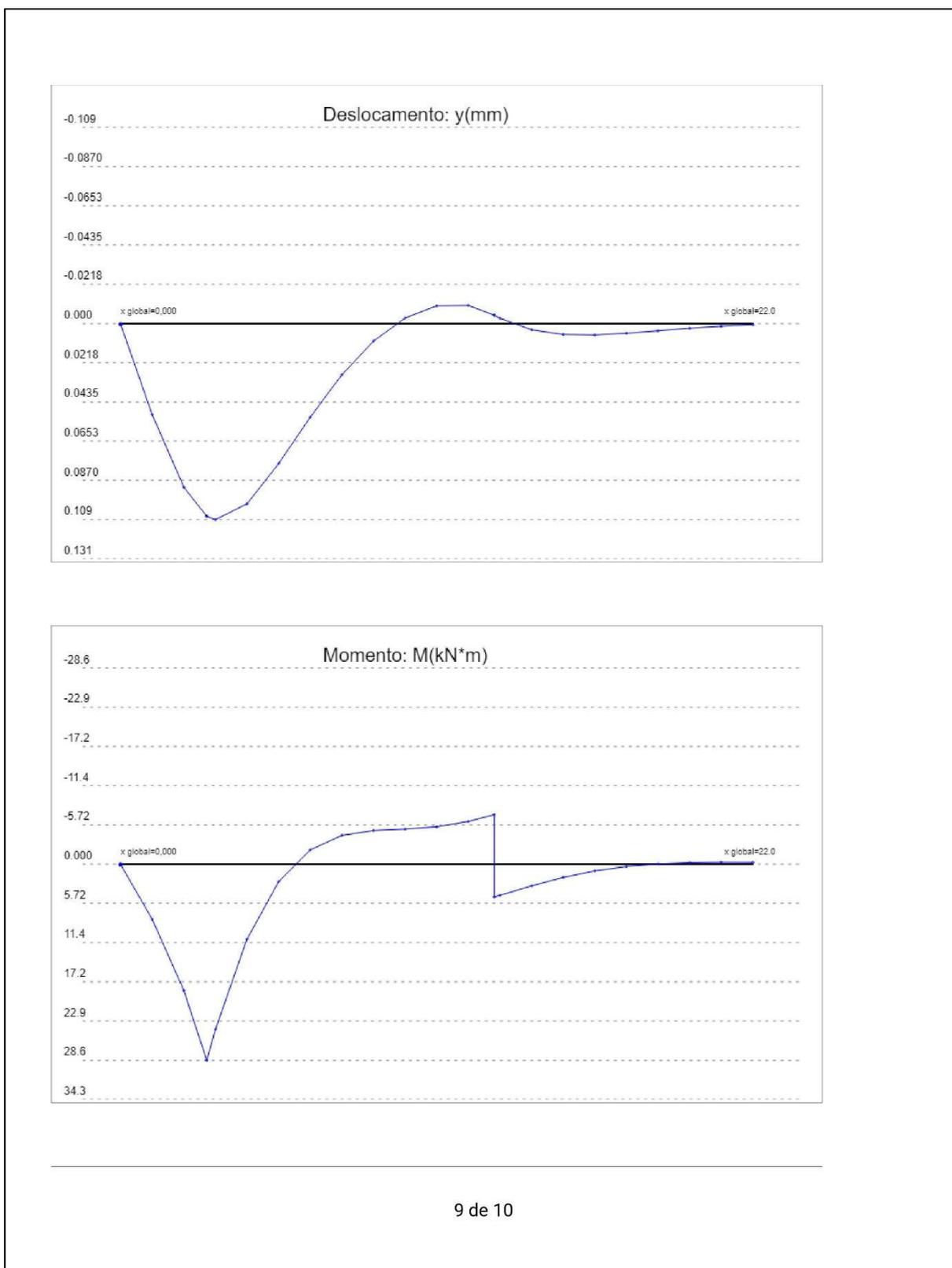
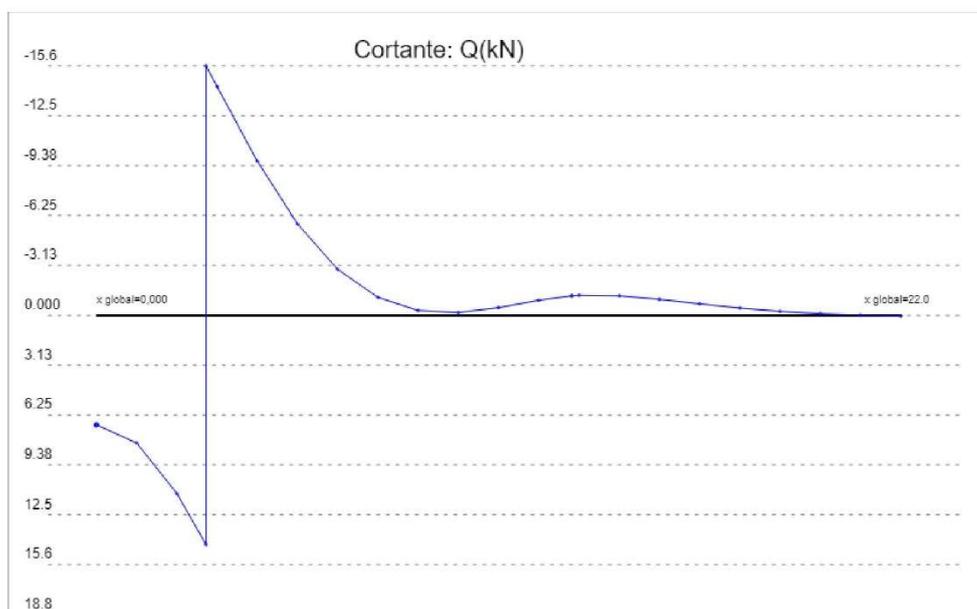


Figura 52 - Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 45 – Conclusão



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SUSSEKIND, J.C. Curso de Análise Estrutural – Deformações em estruturas e Método das forças. 4ª Edição. Porto Alegre. Globo, 1980. 310 páginas.

3.4.7 Outros exemplos

De acordo com a Tabela 4, foram analisados vários outros exemplos de modo a contemplar a maioria das variações possíveis para todos os parâmetros. Eles não foram ilustrados aqui por causa da limitação da quantidade de páginas do trabalho.

Tabela 4 - Outros Exemplos analisados - Continua

Exemplos	Observações
Viga de comprimento infinito com carga pontual	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento infinito com carga distribuída	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento semi-infinito com bordo livre à direita com momento aplicado negativo	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento semi-infinito com bordo apoiado à esquerda com carga pontual	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento semi-infinito com bordo engastado à direita e carga pontual	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento finito de bordos livres com carga distribuída	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento finito de bordos engastados com momento aplicado positivo	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento infinito com carga pontual inclinada	Aparece o alerta indicando que a estrutura não pode ser calculada, o que está correto com a teoria.
Viga de comprimento finito com um bordo livre e um apoiado e com momento aplicado negativo	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento finito com um bordo apoiado e um livre com carga pontual	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento finito com um bordo livre e o outro engastado com momento aplicado positivo	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Tabela 4 – Outros Exemplos analisados - Continua

Exemplos	Observações
Viga de comprimento infinito com carga pontual negativa	Aparece o alerta indicando que a estrutura não pode ser calculada, o que está correto com a teoria.
Viga de comprimento finito com bordo engastado e outro livre com carga distribuída	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento finito com bordo apoiado e outro engastado com carga pontual	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento finito com bordos livres com duas cargas distribuídas	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento finito com bordo engastado e outro apoiado com carga distribuída	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento semi-infinito com bordo apoiado à esquerda e duas cargas pontuais	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento semi-infinito com bordo engastado à direita e dois momentos aplicados	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga de comprimento finito com bordos livres com duas cargas distribuídas	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga com uma carga distribuída e uma pontual	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga com uma carga distribuída e um momento aplicado	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga com dois momentos e uma carga distribuída	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga com duas cargas pontuais e um momento aplicado	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).
Viga com uma carga pontual, um momento concentrado e uma carga distribuída	Todos resultados conferem com o Ftool (2017).

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

4 CONCLUSÃO

Os engenheiros civis estão cada vez mais necessitando de computadores para a obtenção de resultados, uma vez que os programas são capazes de repetir inúmeras vezes os mesmos cálculos em pouco tempo. No entanto, o usuário nem sempre entende como foram obtidos os resultados ou não concorda com a resposta apresentada a partir dos dados de entrada fornecidos. Neste contexto, a característica principal do programa aqui apresentado, o relatório PDF, contribui significativamente para o estudo, por parte de estudantes, professores e recém-formados, dos deslocamentos e esforços de estruturas apoiadas diretamente no solo, que são as vigas sobre base elástica.

O módulo do programa aqui apresentado já contempla todas as possibilidades de resolução da teoria de vigas sobre base elástica e não apresenta necessidade de complementos com pesquisas futuras.

Finalmente, cabe ressaltar que este trabalho faz parte de um grupo de pesquisa do CNPq (NEVE – Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental) e possui outras páginas com programas na área de Análise de Estruturas, Cálculo Numérico, Construção Civil e Dimensionamento de Estruturas de Concreto.

REFERÊNCIAS

- ANTONIAZZI, J. P. Método para a obtenção do coeficiente de reação vertical. In: _____. **Interação solo-estrutura de edifícios com fundações superficiais**. Santa Maria, 2011. p. 34-60. Disponível em <<http://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/7763/ANTONIAZZI%2c%20JULIANA%20PIPPI.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 14 mar. 2018.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6489**: prova de carga direta sobre o terreno de fundação. Rio de Janeiro, 1984. p. 2.
- CINTRA, J. C. A.; AOKI, N. E.; ALBIERO, J. H. **Fundações diretas**: projeto geotécnico. São Carlos: Oficina do texto, 2011. 142p.
- FTOOL. Ftool para Windows, versão 4.00. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2017. Disponível em <<https://www.alis-sol.com.br/Ftool/>>. Acesso em: 30 mar. 2018.
- HOLANDA JÚNIOR, O. G. de. Relação tensão-deformação. In: _____. **Interação solo-estrutura para edifícios de concreto armado sobre fundações diretas**. São Carlos, 1998. p. 27-33. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1998ME_OsvaldoGomesdeHolan daJunior.pdf>. Acesso em: 23 maio 2018.
- LONGO, L. F. **Como determinar o coeficiente de recalque vertical?**. Florianópolis: QiSuporte, 2018. Disponível em <<https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/articles/115004184613-Como-determinar-o-coeficiente-de-recalque-vertical->>. Acesso em: 14 mar. 2018.
- LOUREIRO, M. A. Vigas sobre base elástica. **Revista DIRENG**, São José dos Campos, n. 3, p. 44-47, 1992.
- NOTEPAD++, versão 7.5.6. [S.l.]: Don Ho, 2016. Disponível em: <<https://notepad-plus-plus.org/download/v7.5.6.html>>. Acesso em: 23 maio 2018.
- PDFMAKE. **PLAYGROUND**. Disponível em <<http://pdfmake.org/playground.html>>. Acesso em: 30 mar. 2018.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Markron Books, 1996. 408 p.
- SANTOS JUNIOR, L. J.; LOPES, A. J. F.; NIRSCHL, G. C. Programa base cad para a análise de estruturas lineares. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DO IFSP, 7., 2016, Matão. **Anais...**. Disponível em: <<http://mto.ifsp.edu.br/images/CPI/Anais/IC/1720.pdf>>. Acesso em: 23 maio 2018.
- SUSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**: deformações em estruturas e método das forças. 4. ed. Porto Alegre: Globo, 1980. 310 p.

W3SCHOOLS.COM. **HTML5 tutorial**. Disponível em
<<https://www.w3schools.com/html/default.asp/>>. Acesso em: 30 mar. 2018.