



INSTITUTO FEDERAL  
SÃO PAULO

# INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA

Av. Jerônimo Figueira da Costa, 3014 - Bairro Pozzobon.

CEP 15503-110 - Votuporanga - SP

[www.ifsp.edu.br](http://www.ifsp.edu.br)

TO TRANSLATE THIS DOCUMENT, DOWNLOAD THE PDF REPORT AND  
TRANSLATE ON <https://www.onlinedoctranslator.com/pt/> (FREE - GENERATE COMPLETE PDF TRANSLATED FILE) OR  
TRANSLATE ON <https://translate.google.com/> (SELECT DOCUMENTS - FREE - BUT ONLY TRANSLATE TEXT)

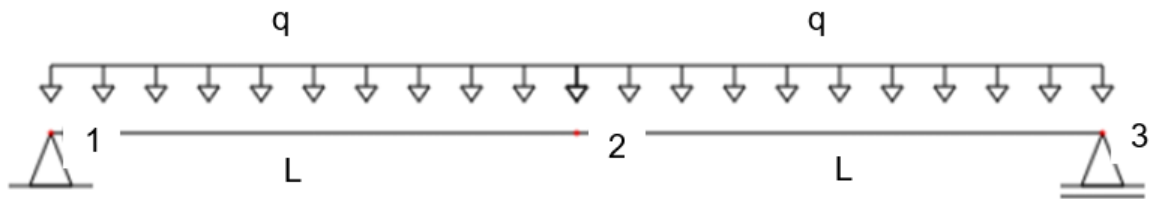
## COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) E MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

Montagem: Prof. Msc. Gustavo Cabrelli Nirschl

Abril de 2020



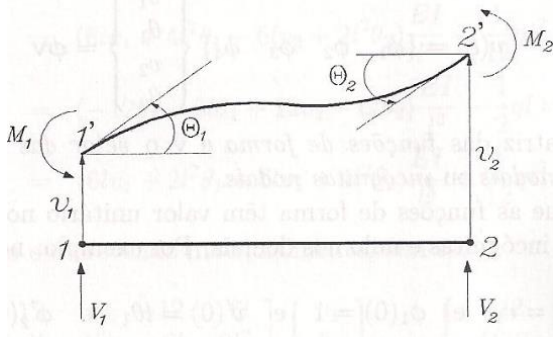
Considera-se a viga a seguir e sua montagem via Método dos Elementos Finitos (MEF) e via Método dos Deslocamentos.



Rigidez à flexão =  $E \cdot I$  (constante)

→ MONTAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF):

A convenção do MEF a ser descrito é:



Considerando elemento de viga (sem graus de liberdade axiais), as matrizes de rigidez dos 2 elementos ficam:

$$k_i = E_i \cdot I_i \begin{bmatrix} \frac{12}{l_i^3} & \frac{6}{l_i^2} & -\frac{12}{l_i^3} & \frac{6}{l_i^2} \\ \frac{6}{l_i^2} & \frac{4}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} \\ -\frac{12}{l_i^3} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{12}{l_i^3} & -\frac{6}{l_i^2} \\ \frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{4}{l_i} \end{bmatrix} = E \cdot I \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} \\ -\frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix}$$



A matriz de rigidez global, em banda, sem as condições de contorno, fica:

$$\text{KG}_{\text{semcc}} = \begin{bmatrix} \frac{12E*I}{L^3} & \frac{6E*I}{L^2} & -\frac{12E*I}{L^3} & \frac{6E*I}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6E*I}{L^2} & \frac{4E*I}{L} & -\frac{6E*I}{L^2} & \frac{2E*I}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{12E*I}{L^3} & -\frac{6E*I}{L^2} & \frac{12E*I}{L^3} + \frac{12E*I}{L^3} & -\frac{6E*I}{L^2} + \frac{6E*I}{L^2} & -\frac{12E*I}{L^3} & \frac{6E*I}{L^2} \\ \frac{6E*I}{L^2} & \frac{2E*I}{L} & -\frac{6E*I}{L^2} + \frac{6E*I}{L^2} & \frac{4E*I}{L} + \frac{4E*I}{L} & -\frac{6E*I}{L^2} & \frac{2E*I}{L} \\ \frac{L^2}{L^2} & \frac{L}{L} & -\frac{L^2}{L^2} + \frac{L^2}{L^2} & \frac{L}{L} + \frac{L}{L} & -\frac{L^2}{L^2} & \frac{L}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12E*I}{L^3} & -\frac{6E*I}{L^2} & \frac{12E*I}{L^3} & -\frac{6E*I}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6E*I}{L^2} & \frac{2E*I}{L} & -\frac{6E*I}{L^2} & \frac{4E*I}{L} \end{bmatrix}$$

Colocando as condições de contorno (tirando as linhas e colunas 1 e 5, referentes a v<sub>1</sub> e v<sub>3</sub>):

$$\text{KG} = \begin{bmatrix} \frac{4E*I}{L} & -\frac{6E*I}{L^2} & \frac{2E*I}{L} & 0 \\ \frac{6E*I}{L^2} & \frac{24E*I}{L^3} & 0 & \frac{6E*I}{L^2} \\ -\frac{L^2}{2E*I} & \frac{L^3}{L^3} & \frac{8E*I}{L} & \frac{2E*I}{L} \\ \frac{L}{0} & \frac{6E*I}{L^2} & \frac{L}{2E*I} & \frac{L}{4E*I} \\ 0 & \frac{6E*I}{L^2} & \frac{2E*I}{L} & \frac{4E*I}{L} \end{bmatrix}$$

O vetor de forças de cada elemento vale:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

O vetor de forças global sem as condições de contorno fica:

$$\text{VG}_{\text{semcc}} = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 - qL/2 \\ qL^2/12 - qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix}$$



Colocando as condições de contorno (tirando as linhas 1 e 5, referentes a  $v_1$  e  $v_3$ ):

$$VG = \begin{Bmatrix} -qL^2/12 \\ -qL \\ 0 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

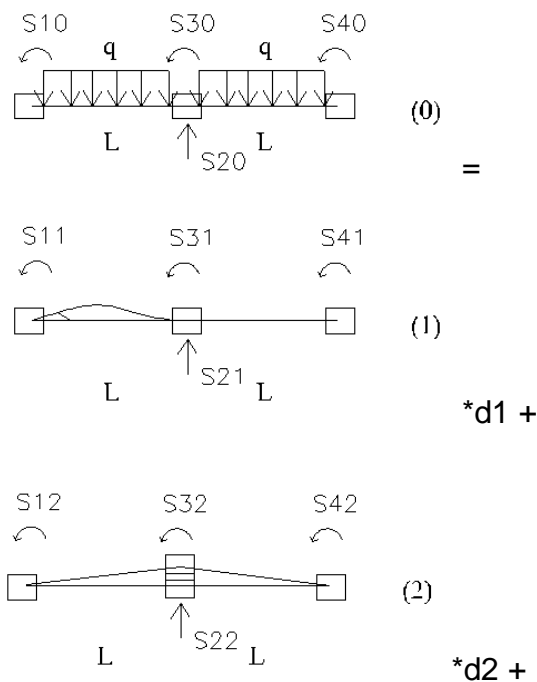
Então, pelo MEF, o sistema a resolver é:

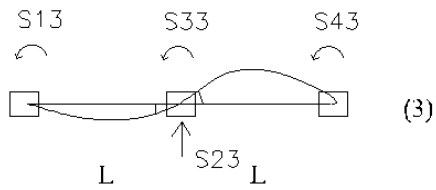
$$KG^*\Delta = VG$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4E*I}{L} & -\frac{6E*I}{L^2} & \frac{2E*I}{L} & 0 \\ \frac{6E*I}{L^2} & \frac{24E*I}{L^3} & 0 & \frac{6E*I}{L^2} \\ \frac{2E*I}{L} & 0 & \frac{8E*I}{L} & \frac{2E*I}{L} \\ 0 & \frac{6E*I}{L^2} & \frac{2E*I}{L} & \frac{4E*I}{L} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL^2/12 \\ -qL \\ 0 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

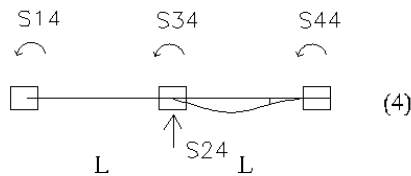
→ MONTAGEM PELO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS:

Também, como no MEF, desconsiderando-se os deslocamentos axiais, que são nulos, temos 4 graus de liberdade (2 giros dos apoios e giro e vertical referentes ao nó interno). Sendo assim, o esquema de solução está a seguir (lembrando que, se usando os graus de liberdade, bloqueiam-se todos os nós). Notar que a ordem dos  $S_{ij}$  e dos casos (i) tem que seguir a do MEF, ou seja, deslocamento depois giro, em cada nó, porque estamos querendo comparar (senão, pode ser qualquer ordem). Além disso, colocar na convenção anteriormente adotada.



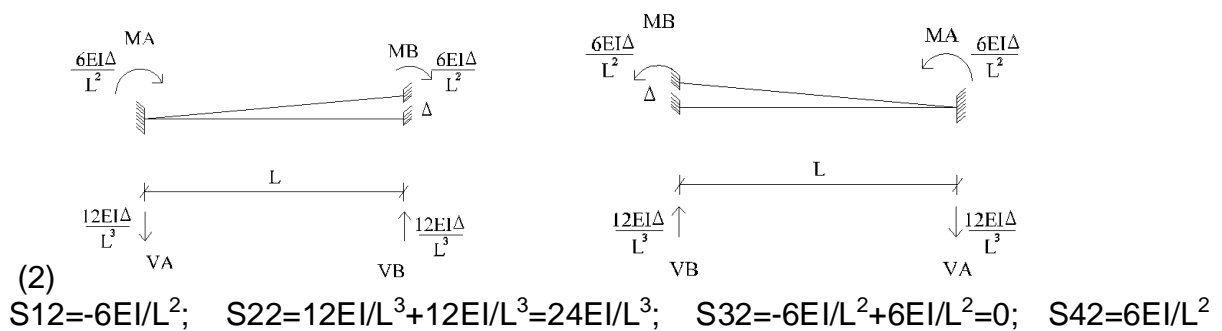
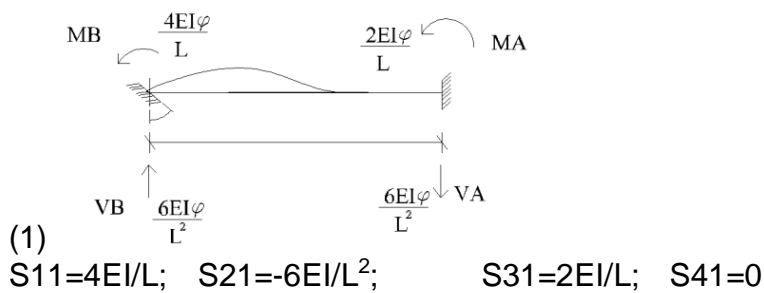
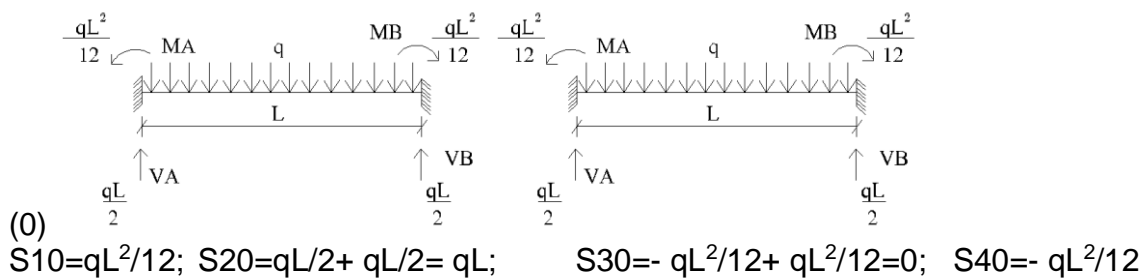


\*d3 +



\*d4

Resolvendo os  $S_{ij}$  pelas tabelas de MENG e coeficientes de rigidez:





(3)  $S_{13}=2EI/L$ ;  $S_{23}=-6EI/L^2+6EI/L^2=0$ ;  $S_{33}=4EI/L+4EI/L=8EI/L$ ;  $S_{43}=2EI/L$

(4)  $S_{14}=0$ ;  $S_{24}=6EI/L^2$ ;  $S_{34}=2EI/L$ ;  $S_{44}=4EI/L$

Fazendo o equilíbrio dos nós:

$$\begin{aligned}
 S_{10} + S_{11} \cdot d_1 + S_{12} \cdot d_2 + S_{13} \cdot d_3 + S_{14} \cdot d_4 &= 0 \\
 S_{20} + S_{21} \cdot d_1 + S_{22} \cdot d_2 + S_{23} \cdot d_3 + S_{24} \cdot d_4 &= 0 \\
 S_{30} + S_{31} \cdot d_1 + S_{32} \cdot d_2 + S_{33} \cdot d_3 + S_{34} \cdot d_4 &= 0 \\
 S_{40} + S_{41} \cdot d_1 + S_{42} \cdot d_2 + S_{43} \cdot d_3 + S_{44} \cdot d_4 &= 0
 \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} & S_{34} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{10} \\ -S_{20} \\ -S_{30} \\ -S_{40} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & 0 \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{24E \cdot I}{L^3} & 0 & \frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{2E \cdot I}{L} & 0 & \frac{8E \cdot I}{L} & \frac{2E \cdot I}{L} \\ 0 & \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qL^2/12 \\ -qL \\ 0 \\ qL^2/12 \end{bmatrix}$$

Veja que é exatamente o mesmo sistema encontrado via MEF. Veja que os deslocamentos  $d_1$  a  $d_4$  correspondem exatamente ao esquema  $v_i$  e  $\theta_i$ . Por isso, o MEF apresentado é o MEF MODELO DOS DELOCAMENTOS OU MODELO DA RIGIDEZ. Se resolvermos a viga via Método das Forças ou via MEF MODELO DAS FORÇAS OU MODELO DAS FLEXIBILIDADES, recairemos num sistema linear igual entre ambos, sendo a matriz chamada de MATRIZ DE FLEXIBILIDADE (e é a inversa da MATRIZ DE RIGIDEZ). No caso, as incógnitas serão as forças, e não os deslocamentos.